

# Résolution numérique d'équations intégrales

## Exemple de la radiativité

Gabriel Peyré  
nikopol0@altern.org  
www.orion3d.fr.st

Le 8 octobre 2001

### Table des matières

<b>1</b>	<b>Analyse fonctionnelle des équations intégrales</b>	<b>4</b>
1.1	Equations intégrales . . . . .	4
1.1.1	Opérateurs à noyau . . . . .	4
1.1.2	Opérateur adjoint . . . . .	4
1.1.3	Equations intégrales de Fredholm du second type . . . . .	5
1.1.4	Opérateurs compacts . . . . .	5
1.2	Méthodes d'approximation classiques . . . . .	8
1.2.1	Séries de Neumann . . . . .	8
1.2.2	Méthode des approximations successives . . . . .	8
1.2.3	Méthode de Nyström . . . . .	9
1.3	Méthodes du noyau dégénéré . . . . .	10
1.3.1	Présentation de la méthode . . . . .	10
1.3.2	Généralités sur l'interpolation . . . . .	11
1.3.3	Interpolation du noyau . . . . .	11
1.4	Méthodes de la base finie . . . . .	12
1.4.1	Généralités sur les méthodes de projection [Kre99, p.218] . . . . .	12
1.4.2	Méthode de collocation . . . . .	13
1.4.3	Méthode des moindres carrés . . . . .	14
1.4.4	Méthode de Galerkin . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Le transport lumineux</b>	<b>16</b>
2.1	Equations intégrale du transport lumineux . . . . .	16
2.1.1	Caractéristiques de la surface . . . . .	16
2.1.2	Equation du rendu . . . . .	16
2.2	Equation dans le cas de la diffusion lambertienne . . . . .	18
2.2.1	Cas de la réflectance diffuse . . . . .	18
2.2.2	Equation simplifiée correspondance . . . . .	18

<b>3</b>	<b>Discrétisation du problème</b>	<b>18</b>
3.1	Méthodes par éléments finis . . . . .	18
3.2	Éléments finis de Lagrange . . . . .	19
3.2.1	Éléments finis simpliciaux . . . . .	19
3.2.2	Éléments finis parallélotopes . . . . .	19
3.3	Equations linéaires obtenues . . . . .	19
3.3.1	Méthode de collocation . . . . .	19
3.3.2	Méthode de Galerkin . . . . .	20
3.4	Méthodes itératives de résolution de système linéaires . . . . .	20
3.4.1	La théorie . . . . .	20
3.4.2	Méthode de Jacobi . . . . .	20
3.4.3	Méthode de Gauss-Seidel . . . . .	21
3.4.4	Méthode de Southwell . . . . .	21
3.5	Les algorithmes de radiosité . . . . .	21
3.5.1	Algorithme de radiosité classique . . . . .	22
3.5.2	Algorithme de radiosité progressive . . . . .	22
<b>4</b>	<b>Formules de quadrature numériques [Dem96, p.59]</b>	<b>23</b>
4.1	Méthode élémentaires et composées . . . . .	23
4.2	Méthodes de Newton-Cotes [Dem96, p.62] . . . . .	24
4.3	Méthode d'intégration de Gauss . . . . .	24
4.3.1	Polynômes orthogonaux [Dem96, p.51] . . . . .	24
4.3.2	Méthodes de Gauss [Dem96, p.73] . . . . .	25
4.3.3	Explication de la démarche . . . . .	25
4.4	Méthode d'intégration de Romberg [Dem96, p.83] . . . . .	26
4.4.1	Extrapolation de Richardson . . . . .	26
4.4.2	Méthode de Romberg . . . . .	27

## Résumé

Le but de cet article est de présenter la résolution d'équations intégrales, et d'illustrer les techniques numériques de résolution par l'exemple de l'équation du transport lumineux. Après un exposé des théories mathématiques nécessaires à la compréhension des équations intégrales, on verra comment les appliquer pour résoudre numériquement l'équation de la radiosité. Enfin, on exposera les algorithmes classiques de radiosité, en s'attachant à comprendre pourquoi ce sont des cas particuliers de la théorie plus générale exposée ici.

Cette présentation ne se veut ni exhaustive (on laisse de côté les méthodes de lancés de rayons, pour se focaliser sur la radiosité), ni trop théorique (la théorie des opérateurs compacts n'est qu'esquissée), cependant, le but est d'insister sur la pluridisciplinarité des méthodes rencontrées, que l'on peut regrouper selon quatres axes :

- La modélisation physique tout d'abord, qui emprunte beaucoup à la théorie des transferts radiatifs et à l'optique géométrique.
- La théorie mathématique, essentiellement l'analyse fonctionnelle des équations intégrales, qui permet d'analyser le problème, de prouver l'existence de solutions, et surtout d'exhiber des méthodes efficaces d'approximation.
- L'analyse numérique, qui étudie ces méthodes, principalement dans le cadre des éléments finis, et de la résolution itérative de systèmes linéaires.
- La programmation sur machine, qui retranscrit ces méthodes sous forme d'algorithmes efficaces, et donne naissance aux algorithmes classiques de radiosité, ainsi qu'à d'autres approches plus novatrices.

# 1 Analyse fonctionnelle des équations intégrales

## 1.1 Equations intégrales

Les équations intégrales ont un caractère fort différent des équations différentielles que l'on rencontre dans la plus part des phénomènes physiques (par exemple de diffusion). La principale source d'équations de ce type est l'étude du transfert d'énergie par radiation. A la différence du transfert radiatif, les phénomènes de radiation ne peuvent pas être décrits à l'aide d'équations mettant en jeu un simple champ scalaire<sup>1</sup>. Les lois de conservations deviennent alors plus complexes et ne peuvent s'exprimer que sous formes d'intégrales étendues à toutes la surface considérée<sup>2</sup>.

### 1.1.1 Opérateurs à noyau

Dans la suite de cette partie, on se place dans la majeure partie des cas dans l'espace  $C(D)$  des fonctions continue de  $D$  dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Dans notre étude, l'ensemble  $D$  sera un compact mesurable  $D \subset \mathbb{R}^N$  fermeture de son intérieur. Le principal intérêt de l'espace  $C(D)$  est de disposer d'un produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle = \int_D f(x)g(x)dx$$

Notre espace  $C(D)$  est munie de la norme uniforme :  $\|f\|_\infty = \max\{|f(x)|, x \in D\}$ . On aura parfois besoin de se placer dans l'espace complété de  $C(D)$  pour la norme du produit scalaire, c'est à dire l'espace de Hilbert  $H = L^2(D)$ , espace des fonctions de  $D$  dans  $\mathbb{R}$  de module carré intégrable.

On va considérer des équations mettant en jeu des intégrales, sous la forme d'un opérateur linéaire  $A : C(D) \rightarrow C(D)$ . Pour le définir, on se donne une fonction<sup>3</sup>  $K : D \times D \rightarrow \mathbb{R}$ , continue, ce qui permet de définir notre opérateur à noyau par la formule :

$$A : f \in C(D) \longmapsto Af \in C(D) \tag{1.1}$$

$$(Af)(x) = \int_D f(y)K(x,y)dy \tag{1.2}$$

Cet opérateur est continue, de norme  $\|A\|_{\mathcal{L}(C(D),C(D))} \leq \max\{\int_D |K(x,y)|dy, x \in D\}$ .

### 1.1.2 Opérateur adjoint

**Définition 1.1.** OPÉRATEURS ADJOINTS On considère  $C(D)$  muni du produit scalaire identique à celui défini sur  $L^2(D)$ , à savoir :

$$\forall (f,g) \in C(D)^2, \langle f, g \rangle = \int_D f(x)g(x)dx \tag{1.3}$$

Ce produit scalaire permet de définir la notion d'orthogonalité, ainsi que celle d'adjoint. On dit que  $A : C(D) \rightarrow C(D)$  et  $B : C(D) \rightarrow C(D)$  sont adjoints si ils vérifient :

$$\forall (f,g) \in C(D)^2, \langle Af, g \rangle = \langle f, Bg \rangle \tag{1.4}$$

Si un opérateur  $A : C(D) \rightarrow C(D)$  admet un adjoint  $B$ , alors cet adjoint est unique et  $A$  et  $B$  sont linéaires.

---

1. Comme le champ des températures.  
2. On ne peut plus étudier le phénomène localement.  
3. Que l'on nommera fonction noyau.

*Remarque.* Ces définitions s'étendent au cas d'espace quelconques  $X, Y$  munis d'une application bilinéaire  $\varphi : (X, Y) \rightarrow \mathbb{R}$  non dégénérée<sup>4</sup>. Un cas particulier est celui d'un espace de *Banach*  $E$  et de son dual  $E'$ , muni de la forme dual canonique  $\langle \varphi, x \rangle = \varphi(x)$ . La théorie générale des systèmes duaux est faite dans [Kre99, p.39].

**Théorème 1.1.** ADJOINT D'UN OPÉRATEUR À NOYAU *On considère un opérateur à noyau  $A$  construit à partir d'un noyau  $k$  continu sur  $D \times D$  par la formule :*

$$\forall x \in D, (A\varphi)(x) = \int_D K(x, y)\varphi(y)dy \quad (1.5)$$

*Alors l'opérateur  $A$  admet un unique opérateur adjoint  $B$  pour le produit scalaire usuel de  $L^2$ , défini par :*

$$\forall x \in D, (A\psi)(x) = \int_D K(y, x)\psi(y)dy \quad (1.6)$$

*Remarque.* Ce théorème est démontré dans [Kre99, p.41].

### 1.1.3 Equations intégrales de Fredholm du second type

L'équation qui va nous intéresser dans la suite de cet exposé est une équation de *Fredholm du second type*, pour  $f \in C(D)$  et  $A$  un opérateur à noyau continu comme celui défini en (1.1), trouver  $\varphi \in C(D)$  tel que :

$$\varphi(x) = f(x) + A\varphi(x) \quad (1.7)$$

Il s'agit donc d'un problème de point fixe pour la fonctionnelle  $\varphi \mapsto A\varphi + f$ .

Quand la norme de  $A$  vérifie  $\|A\| < 1$ , l'opérateur  $I - A$  est inversible, et l'équation admet une unique solution donnée par  $\varphi = (I - A)^{-1}f$ . Dans la suite de l'exposé, il va s'agir d'approcher numériquement cette solution.

### 1.1.4 Opérateurs compacts

Nous venons de voir une condition suffisante pour qu'une équation de Fredholm du second type ait une solution, à savoir que l'opérateur  $A$  vérifie  $\|A\| < 1$ . Cette solution sera suffisante pour étudier les problèmes de transport lumineux, cependant, dans la plupart des cas, il va falloir analyser la situation de façon plus fine, et c'est pourquoi on est amené à introduire la notion d'opérateurs compacts, qui est la notion naturelle qui permet de prolonger de façon simple les résultats obtenus en dimension finie. La théorie des opérateurs compacts (en particulier la théorie spectrale) est bien expliquée dans [Bre83, p.89].

**Définition 1.2.** OPÉRATEUR COMPACT Un opérateur linéaire  $A : X \xrightarrow{A} Y$  entre deux espaces normés est dit compact si l'image de la boule unité  $B_X$  de  $X$  est relativement compacte, ie si  $\overline{A(B_X)}$  est compacte. Ceci est équivalent à dire que pour toute suite bornée  $(\varphi_n)$  de  $X$ , on peut extraire de  $(A\varphi_n)$  une suite convergente dans  $Y$ .

*Remarque.* L'identité sur un espace normé  $X$  n'est compacte qu'en dimension finie. De même, en dimension infinie, un opérateur compact n'est jamais bijectif (ie 0 est dans son spectre).

---

4. Ce sera le produit scalaire.

Voici le principal résultat pour l'étude des équations intégrales. Sa démonstration se fait facilement à l'aide du théorème d'*Ascoli*, qui donne une condition pour qu'une famille d'opérateurs soit relativement compact dans l'ensemble des applications continues,  $(C(D), \|\cdot\|_\infty)$ .

**Théorème 1.2.** COMPACITÉ DES OPÉRATEURS À NOYAU *L'opérateur intégral avec noyau continu défini en (1.1.1) est compact sur  $(C(D), \|\cdot\|_\infty)$ .*

Nous allons maintenant présenter les résultats de la théorie de *Riesz* sur les opérateurs compacts, qui dit essentiellement que ces opérateurs se comportent presque comme des opérateurs de dimension finie, dans le sens où les espaces spectraux sont de dimension finis. Ceci signifie que lorsque l'on perturbe l'identité de l'espace  $X$  suivant un opérateur compact  $A$ , on obtient un noyau de dimension finie et une image de dimension finie. Pour montrer tout cela, on étudie donc une perturbation du type  $L = I - A$ , avec  $A$  compact, ce qui permet l'étude sans perte de généralité des espaces  $Ker(I - \lambda A)$  et  $Im(I - \lambda A)$ , puisque  $\lambda A$  est encore compact. Pour un exposé complet de cette théorie, on pourra se référer à [Kre99, p.28], ainsi qu'à [Bre83, p.91] pour une présentation plus élémentaire.

**Théorème 1.3.** THÉORÈME DE RIESZ *On considère un opérateur compact  $A : X \rightarrow X$  sur  $X$  un espace normé, ainsi que l'opérateur étudié dans le cadre des équations intégrales, à savoir  $L = I - A$ . Cette opérateur a les propriétés suivantes :*

- $Ker(L)$  est de dimension finie.
- $Im(L)$  est un sous espace fermé de co-dimension finie.
- Il existe un unique  $r \in \mathbb{N}$  appelé nombre de Riesz de l'opérateur  $A$  tel que :

$$\{0\} = Ker(L^0) \subsetneq Ker(L^1) \subsetneq \dots \subsetneq Ker(L^r) = Ker(L^{r+1}) = \dots \quad (1.8)$$

$$X = Im(L^0) \supsetneq Im(L^1) \supsetneq \dots \supsetneq Im(L^r) = Im(L^{r+1}) = \dots \quad (1.9)$$

Et on a la somme directe :  $X = Ker(L^r) \oplus Im(L^r)$ .

De plus, on a l'alternative de Fredholm :  $Im(L) = Ker(L^*)^\perp$ , où  $K^* : X' \rightarrow X'$  est l'opérateur adjoint de  $X$ .

*Remarque.* Dans le cas d'un opérateur compact  $A$  sur un espace de hilbert, l'adjoint  $L^*$  peut être vu comme un vrai opérateur de  $X \rightarrow X$ , et l'expression  $Im(L) = Ker(L^*)^\perp$  peut être vue en terme d'orthogonalité (on identifie l'orthogonalité au sens de la dualité et l'orthogonalité au sens du produit scalaire grace au théorème de représentation de Riesz).

Ce théorème très puissant va nous permettre de donner une caractérisation des solutions des équations de Fredholm du second type :

**Corrolaire 1.4.** APPLICATION AUX ÉQUATIONS DE FREDHOLM *Soit  $A : X \rightarrow X$  un opérateur compact continu. Pour  $f \in X$ , on considère les problèmes :*

$$\text{trouver } \varphi \in X \text{ tel que } \varphi - A\varphi = 0 \quad (1.10)$$

$$\text{trouver } \varphi \in X \text{ tel que } \varphi - A\varphi = f \quad (1.11)$$

On a alors l'alternative :

- Si l'équation (1.10) n'a que la solution triviale  $\varphi = 0$ ; alors pour tout  $f \in X$ , l'équation (1.11) a une unique solution  $\varphi$ . De plus cette solution dépend continuellement de  $f$ .
- Si l'équation (1.10) a une solution non triviale, alors elle admet un nombre fini  $m \in \mathbb{N}$  de solutions  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$  linéairement indépendantes. Dans ce cas, l'équation (1.11) est soit insoluble, soit ses

solutions s'écrivent sous la forme :

$$\varphi = \tilde{\varphi} + \sum_{k=1}^m \alpha_k \varphi_k \quad (1.12)$$

où  $\tilde{\varphi}$  est une solution particulière de (1.11). Le fait que (1.11) soit ou non soluble s'exprime par le fait que  $f \in \text{Ker}(L^*)^\perp$ , ie  $f$  doit satisfaire  $m$  conditions d'orthogonalité.

*Remarque.* La chose importante avec la théorie de Riesz est qu'elle permet de réduire l'étude d'un problème du type (1.11) avec second membre à celle d'un problème sans second membre, du type (1.10). Nous allons enfin pouvoir appliquer tous ces résultats pour l'étude de nos équations intégrales. Le théorème suivant, qui découlent des énonces précédant se trouve [Kre99, p.48].

**Théorème 1.5.** APPLICATION AUX ÉQUATIONS INTÉGRALES *On considère les deux équations intégrales homogènes duales l'une de l'autres<sup>5</sup> issues du noyau continu  $K : D \times D \rightarrow \mathbb{R}$ , qui sont donc définies par :*

$$\text{trouver } \varphi \in C(D) \text{ telle que } \varphi - \int_D K(x,y)\varphi(y)dy = 0 \quad (1.13)$$

$$\text{trouver } \psi \in C(D) \text{ telle que } \psi - \int_D K(y,x)\psi(y)dy = 0 \quad (1.14)$$

On considère, pour  $f \in C(D)$  et  $g \in C(D)$  les équations intégrales avec seconds membres<sup>6</sup> :

$$\text{trouver } \varphi \in C(D) \text{ telle que } \varphi - \int_D K(x,y)\varphi(y)dy = f(x) \quad (1.15)$$

$$\text{trouver } \psi \in C(D) \text{ telle que } \psi - \int_D K(y,x)\psi(y)dy = g(x) \quad (1.16)$$

Alors on a l'alternative :

- Ou bien les équations (1.13) et (1.14) n'ont que les solutions triviales  $\varphi \equiv 0$  et  $\psi \equiv 0$ , et dans ce cas les équations (1.15) et (1.16) admettent une unique solution  $\varphi \in C(D)$  et  $\psi \in C(D)$  pour chaque  $f \in C(D)$  et  $g \in C(D)$ .
- Ou bien les équations (1.13) et (1.14) ont le même nombre fini  $m$  de solutions linéairement indépendantes, et dans ce cas, les équations (1.15) et (1.16) sont résolubles si et seulement si pour toute solution  $\varphi$  de (1.13) et toute solution  $\psi$  de (1.14) on a :

$$\int_D f(x)\psi(x)dx = \int_D g(x)\varphi(x)dx = 0 \quad (1.17)$$

dans ces conditions, la solution générale de (1.15) s'écrit sous la forme :

$$\varphi = \tilde{\varphi} + \sum_{k=1}^m \alpha_k \varphi_k \quad (1.18)$$

où  $\tilde{\varphi}$  est une solution particulière de (1.15) et les  $(\varphi_k)_{0 \leq k \leq m}$  forme une famille libre de solutions de (1.13).

---

5. On a cette dualité grâce au résultat 1.1.

6. Ce sont celles-ci qui nous intéressent.

## 1.2 Méthodes d'approximation classiques

### 1.2.1 Séries de Neumann

On commence par la méthode la plus universelle, puisqu'elle n'utilise nullement de propriétés hilbertiennes (on n'utilise ni produit scalaire, ni projection), et est donc valable sur un espace normé complet quelconque (ie un espace de Banach). On pourra bien sûr considérer l'espace  $C(D)$  muni de la norme infinie  $\|\cdot\|_\infty$ , mais aussi son complété pour le produit scalaire intégral, c'est à dire  $L^2(D)$  muni de  $\|\cdot\|_2$ .

La première solution envisagée est d'approcher, lorsque  $\|A\| < 1$ <sup>7</sup>, l'opérateur  $M = (I - A)^{-1}$ , où  $A$  est défini en (1.1), par une série :

$$(I + A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n.$$

On approche donc la solution  $\varphi$  par  $\varphi_n = M_n f$ , où l'opérateur  $M_n$  est défini par  $M_n = \sum_{i=0}^n K^i$ . On a alors une majoration de la vitesse de convergence :  $\|f - f_n\| \leq \frac{\|K\|^{n+1}}{1 - \|K\|} \|g\|$ .

En réalité, on calcule cette somme par récurrence, en utilisant des noyaux itérés, définis par les formules :

$$k_0(x,y) = K(x,y) \tag{1.19}$$

$$k_{n+1}(x,y) = \int_0^1 K(x,z)k_n(z,y)dx \tag{1.20}$$

$$m_n(x,y) = \sum_{i=0}^n k_i(x,y) \tag{1.21}$$

On a alors l'expression de  $\varphi_n$  suivante :

$$\varphi_n(x) = \int_0^1 m_n(x,y)f(y)dy \tag{1.22}$$

### 1.2.2 Méthode des approximations successives

Une autre méthode, appelée méthode des approximations successives consiste à utiliser directement  $\varphi_n$  dans la récurrence :  $\varphi_{n+1} = A\varphi_n + g$ . On voit que ce n'est rien d'autre que la méthode des itérations successives pour résoudre un problème de point fixe. Cette méthode est présentée dans [Kre99, p.18].

Dans le cas d'un opérateur à noyau  $A$  qui vérifie  $\|A\| < 1$ , on a donc une convergence uniforme de  $f_n$  vers la solution unique de  $\varphi - A\varphi = f$ . Cependant, on peut analyser cette convergence et déterminer un critère plus fin, comme cela est fait dans [Kre99, p.170]. Ceci est résumé par le théorème suivant :

**Théorème 1.6.** CRITÈRE DE CONVERGENCE DES APPROXIMATIONS SUCCESSIVE *Soit  $A : X \rightarrow X$  un opérateur continue sur un espace de banach  $X$  dont le rayon spectral vérifie  $r(A) < 1$ . Alors la méthode des approximations successive définie par :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \varphi_{n+1} = A\varphi_n + f \tag{1.23}$$

*converge pour tout  $\varphi_0 \in X$  et  $f \in X$  vers l'unique solution de  $\varphi - A\varphi = f$ .*

*Remarque.* Ce résultat est très naturel en dimension finie où le rayon spectral peut être interprété comme la plus grande valeur de  $N(A)$  pour l'ensemble des normes d'algèbre  $N$ , et on a déjà vu qu'un critère de convergence est justement qu'une de ces norme vérifie  $N(A) < 1$ .

---

7. On dit que  $A$  est une contraction



### 1.2.3 Méthode de Nyström

Cette méthode, aussi appelée *méthode de quadrature*, consiste à appliquer les méthodes numériques de calcul d'intégrales pour aboutir à un système linéaire. En fait, ce n'est rien d'autre que l'approximation du noyau  $K$  par un opérateur de dimension fini, ie une matrice. Cette méthode est totalement discrète, elle fournit donc un premier moyen efficace de résolution d'équation numérique.

Un exposé élémentaire est fait dans [Arv93], il présente la méthode dans le cas de l'équation de l'illumination globale. Pour un exposé complet de la méthode, il faut se reporter à [Kre99, p.197]. Comme cette méthode est importante, et met en jeu les méthodes d'intégration numérique, nous allons la présenter en détail.

On souhaite approximer l'opérateur à noyau  $A$  défini par :

$$\forall x \in D, (A\varphi)(x) := \int_D K(x,y)\varphi(y)dy \quad (1.24)$$

Pour ce faire, on se donne des règles de quadrature  $(Q_n)$  pour calculer l'intégrale du noyau<sup>8</sup> via des points  $(x_i^{(n)})_{1 \leq i \leq n}$  ainsi que des poids  $(\alpha_i^{(n)})_{1 \leq i \leq n}$  d'où l'introduction d'un nouvel opérateur  $A_n$  :

$$\forall x \in D, (A_n\varphi)(x) := \sum_{k=1}^n \alpha_k^{(n)} K(x, x_k^{(n)}) \varphi(x_k^{(n)}) \quad (1.25)$$

*Remarque.* On peut voir ces règles de quadratures comme une suite d'opérateurs  $Q_n : C(D) \rightarrow C(D)$ . On dira que ces règles seront convergentes si elles convergent point à point, ie si :

$$\forall f \in C(D), Q_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_D f \quad (1.26)$$

Alors, on va approcher la solution  $\varphi$  de l'équation  $\varphi - A\varphi = f$  par la solution  $\varphi_n$  du problème

$$\varphi_n - A_n\varphi_n = f \quad (1.27)$$

Ceci mène, une fois le problème discrétisé une seconde fois<sup>9</sup>, à la résolution d'un système linéaire. Ce qui est remarquable, c'est qu'une fois ce système résolu, on peut construire une solution de notre problème d'approximation original (1.27). Tout ceci est résumé par le théorème suivant :

**Théorème 1.7.** MÉTHODE DE NYSTRÖM *Soit  $\varphi_n$  comme décrit précédemment. Alors les valeurs  $\varphi_j^{(n)} = \varphi_n(x_j^{(n)})$  sont solution du système linéaire suivant, où l'on a noté  $k_{ij} = K(x_i^{(n)}, x_j^{(n)})$  :*

$$\begin{bmatrix} 1 - \alpha_1 k_{11} & -\alpha_2 k_{12} & \dots & -\alpha_n k_{1n} \\ -\alpha_1 k_{21} & 1 - \alpha_2 k_{22} & \dots & -\alpha_n k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_1 k_{n1} & -\alpha_1 k_{n2} & \dots & 1 - \alpha_n k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1^{(n)} \\ \varphi_2^{(n)} \\ \vdots \\ \varphi_n^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_1^{(n)}) \\ f(x_2^{(n)}) \\ \vdots \\ f(x_n^{(n)}) \end{bmatrix} \quad (1.28)$$

Réciproquement, si on se donne une solution  $(\varphi_j^{(n)})_{1 \leq j \leq n}$  du système (1.28), alors la fonction  $\varphi_n$  définie par :

$$\varphi_n(x) := f(x) + \sum_{k=1}^n \alpha_k^{(n)} K(x, x_k^{(n)}) \varphi_k^{(n)} \quad (1.29)$$

8. Ces règles vont bien sûr devenir de plus en plus précise, via l'introduction de plus en plus de points.

9. Mais cette fois-ci sur les  $x$ .

vérifie l'équation (1.27).

*Remarque.* Une variante consisterait à prendre des méthodes de quadratures différente pour chaque  $x$ , ceci menant aux même calcul, avec un indice de plus au niveau des poids  $\alpha_i$ .

Pour mémoire, on se contentera de citer un théorème de convergence, que l'on peut retrouver dans [Kre99, p.202].

**Théorème 1.8.** CONVERGENCE DE LA MÉTHODE DE NYSTRÖM *On suppose que les règles de quadrature  $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de notre méthode de Nyström sont convergentes. Dans ce cas la méthode Nyström est convergente point à point, ie  $\forall \varphi \in C(D)$ ,  $A_n \varphi \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A\varphi$ , mais ne converge pas nécessairement en norme.*

### 1.3 Méthodes du noyau dégénéré

Dans cette partie, il s'agit de présenter une méthode d'approximation d'un opérateur continu par une suite d'opérateurs de rang fini. Pour cela, on suppose va se restreindre un espace  $X$  muni d'un produit scalaire<sup>10</sup>, par exemple  $C(D)$ . L'étude suivante est détaillée dans [Kre99, p.178].

#### 1.3.1 Présentation de la méthode

On se donne un opérateur linéaire continu  $A : X \rightarrow X$ , et l'on cherche à l'approximer par une suite d'opérateur  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de la forme :

$$A_n \varphi = \sum_{j=1}^n \langle \varphi, b_j \rangle a_j \quad (1.30)$$

où  $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$  et  $(b_i)_{1 \leq i \leq n}$  sont des familles d'éléments de  $X$ , avec de plus la famille  $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$  linéairement indépendante.

Le fait important est qu'une fois l'opérateur dégénéré  $A_n$  calculé, résoudre le problème d'approximation résulte de la résolution d'un système linéaire, comme l'explique le théorème suivant :

**Théorème 1.9.** *Les solutions de l'équation :*

$$\varphi_n - \sum_{j=1}^n \langle \varphi, b_j \rangle a_j = f \quad (1.31)$$

ont la forme :

$$\varphi_n = f + \sum_{k=1}^n \gamma_k a_k \quad (1.32)$$

où les coefficients  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  sont solutions du système linéaire suivant :

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}, \gamma_j - \sum_{k=1}^n \langle a_k, b_j \rangle \gamma_k = \langle f, b_j \rangle \quad (1.33)$$

Dans le cas où  $A$  est un opérateur à noyau sur  $C(D)$  dont le noyau est  $K$ , cette méthode correspond à approximer  $K$  par une suite de noyau dégénérés  $K_n$  de la forme :

$$K_n(x, y) = \sum_{j=1}^n a_j(x) b_j(y) \quad (1.34)$$

---

10. Bien qu'on puisse faire l'étude pour un espace muni d'une forme linéaire non dégénérée.

### 1.3.2 Généralités sur l'interpolation

Les résultats qui suivent seront utilisés par la suite dans d'autres méthodes (plus efficaces) d'approximation, notamment la méthode de collocation. Les résultats généraux sur l'interpolation sont tirés de [Kre99, p.179].

Dans la suite de l'exposé, on va beaucoup parler d'opérateurs de projection, présentons d'abord quelques résultats relatifs à un opérateur de projection particulier : celui d'interpolation, qui va en fait nous servir pour introduire une première classe de méthodes, dites de *collocation*. Dans la suite, on se place sur notre traditionnel espace  $C(D)$ .

**Définition 1.3.** ENSEMBLE UNISOLVANT Pour construire notre opérateur d'interpolation, on se donne un espace vectoriel  $U_n$  de  $C(D)$  de dimension finie  $n$ . On se donne aussi  $n$  points de  $D$  notés  $x_1, \dots, x_n$  tel que la seule fonction  $f \in U_n$  vérifiant  $\forall i \in \{1, \dots, n\}, f(x_i) = 0$  soit la fonction nulle. On dit que notre ensemble est unisolvant.

Le théorème principal, qui est aussi à la base de la méthode des éléments finis est le suivant :

**Théorème 1.10.** INTERPOLATION ABSTRAITE *Étant donné  $U_n$  et les points  $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$  présentés, si on se donne une fonction  $g \in C(D)$ , il existe une unique fonction  $u \in U_n$  qui interpole  $g$  aux points  $x_i$ , ie :*

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}, u(x_j) = g(x_j) \quad (1.35)$$

L'opérateur d'interpolation  $P_n : C(D) \rightarrow U_n$  qui à  $g$  associe  $u$  est un opérateur de projection continu.

La chose importante qui est utilisée dans la démonstration de ce théorème est l'existence d'une base  $(L_k)_{1 \leq k \leq n}$  de  $U_n$  dite *d'interpolation*, c'est à dire vérifiant  $L_k(x_j) = \delta_{kj}$ . On l'appelle souvent la *base de Lagranges* associée à  $U_n$  et aux  $x_i$ .

Pour terminer, donnons une formule d'erreur dans le cas de l'approximation de *Lagrange* d'une fonction sur  $\mathbb{R}$ , résultat que l'on peut trouver dans [Dem96, p.23].

**Théorème 1.11.** FORMULE D'ERREUR *On considère le polynôme d'interpolation  $p_n$  de  $f \in C^{(n+1)}([a,b])$  en  $n+1$  points de  $[a,b]$  :*

$$a = x_0 < x_1 = x_0 + h < \dots < x_n = b \quad \text{avec } h = \frac{1}{n} \quad (1.36)$$

On a alors :

$$\|f - p_n\|_\infty \leq \frac{1}{(n+1)!} \|\pi_{n+1}\|_\infty \|f^{(n+1)}\|_\infty \quad \text{avec :} \quad (1.37)$$

$$\pi_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i) \quad (1.38)$$

*Sans hypothèse sur la répartition des  $x_i$ , on n'a pas forcément convergence uniforme des  $p_n$  quand le pas de la subdivision diminue (phénomène de Runge, [Dem96, p.36]).*

### 1.3.3 Interpolation du noyau

On peut appliquer cet opérateur d'interpolation pour construire une suite de noyaux dégénérés. Cette construction est réalisée dans [Kre99, p.187]. Pour expliquer la méthode, on se restreint au cas où  $D$  est un segment de  $\mathbb{R}$ , et on considère donc un problème de Fredholm du type :

$$\text{trouver } \varphi : [a,b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ telle que } \varphi(x) - \int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy = f(x) \quad a \leq x \leq b \quad (1.39)$$

Pour approximer la solution  $\varphi$ , on va interpolier, pour chaque  $y \in [a,b]$  la fonction  $x \rightarrow K(x,y)$  aux points  $x_1 < \dots < x_n$ , ce qui donne un noyau dégénéré sous la forme :

$$K_n(x,y) = \sum_{j=1}^n L_j(x)K(x_j,y) \tag{1.40}$$

Cette technique d'interpolation est très large, et permet de réaliser aussi bien des interpolations locales proches des éléments finis que des interpolations locales du type interpolation trigonométriques<sup>11</sup>. C'est aussi ce qui fait ça faiblesse face à des solutions plus adaptées à certains problèmes, comme les éléments finis.

*Remarque.* Faisons une remarque importante qui sera répétée pour les méthodes suivantes. La méthode du noyau dégénéré est une méthode semi-discrète, dans le sens où l'on a fait seulement la moitié du travail. En effet, il reste encore des intégrales à calculer, et pour se faire, on va utiliser des méthodes de quadratures classique. Sans rentrer dans les détails, on voit ici la puissance et la généralité des méthodes de *Nyström*, puisque en effectuant ces quadrature, on ne fait rien d'autre que résoudre le système de *Nyström* !

## 1.4 Méthodes de la base finie

Ces méthodes, aussi appelées méthodes de projection sont exposées de façon très complète dans [Kre99, p.197]. Un exposé élémentaire est fait dans [Arv93] dans le cas de l'équation du rendu (illumination globale).

Les intérêts des méthodes de projection par rapport aux méthodes de quadrature résident dans le fait que ces méthodes ne sont pas réservées aux seules équations de *Fredholm* du second type<sup>12</sup> et qu'elles permettent un bon contrôle du compromis entre précision et simplicité de la mise en oeuvre.

Dans la suite de l'énoncé, on note  $\hat{\varphi} = \varphi - A\varphi$ , où  $A$  est notre opérateur à noyau. On cherche donc à résoudre, pour  $f \in C(D)$ , le problème :

$$\varphi - A\varphi = f \tag{1.41}$$

$$\Leftrightarrow \hat{\varphi} = f \tag{1.42}$$

où  $A$  est notre opérateur formé à partir d'un noyau continu.

### 1.4.1 Généralités sur les méthodes de projection [Kre99, p.218]

Avant d'étudier des méthodes de projection particulières, donnons quelques résultats relatifs à l'approximation par projection. On se donne un opérateur borné  $A : X \rightarrow X$  d'un espace de *Banach*  $X$ , ainsi qu'une suite de sous espaces  $X_n \subset X$  de dimension finie  $n$ . Soit alors  $P_n : X \rightarrow X_n$  un projecteur sur  $X_n$ . Ceci signifie que  $P_n \neq 0$  vérifie  $\forall \varphi \in X_n, P_n\varphi = \varphi$ . Par exemple, l'opérateur d'interpolation  $P_n$  défini au 1.3.2 est un projecteur.

Pour expliciter les systèmes linéaires obtenus, il suffira d'écrire  $\varphi_n$  dans la base des  $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$  :

$$\varphi_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i \tag{1.43}$$

---

11. Pour les problèmes périodiques.

12. Bien qu'ici on se limite à ces dernières

**Définition 1.4.** MÉTHODE DE PROJECTION On considère, pour  $A : X \rightarrow X$  continu et  $f \in X$ , l'équation

$$A\varphi = f, \text{ pour } \varphi \in X \quad (1.44)$$

On approxime cette équation par l'équation :

$$P_n A \varphi_n = P_n f, \text{ pour } \varphi_n \in X_n \quad (1.45)$$

Cette méthode de projection est dite convergente si il existe un rang  $n_0$  à partir duquel l'équation (1.45) admet une unique solution  $\varphi_n$ , et si  $\varphi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi$ , où  $\varphi$  est l'unique solution de (1.44).

On peut donner un théorème de convergence pour l'approximation d'une équation de *Fredholm* du second type :

$$\varphi - A\varphi = f \quad (1.46)$$

avec toujours un opérateur continu  $A : X \rightarrow X$  et les mêmes opérateurs de projection  $P_n$ . Le théorème qui suit se trouve dans [Kre99,p.223].

**Théorème 1.12.** *On suppose l'opérateur  $A$  est compact avec  $I - A$  injectif. On suppose de plus que l'opérateur de projection converge point à point, ie  $P_n \varphi \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi$ . Alors la méthode de projection converge pour  $I - A$ , ie pour l'équation de Fredholm du second type.*

La preuve de ce théorème utilise le théorème de *Banach - Steinhaus*<sup>13</sup>, que l'on peut trouver dans [Bre83], ou bien dans [Kre99, p.165]. C'est lui qui permet de passer d'une convergence ponctuelle à une convergence des opérateurs. Pour une explication complète de la convergence des méthodes de projection, se reporter à [Pey01], écrit par moi-même.

### 1.4.2 Méthode de collocation

Un exposé élémentaire est fait dans [Arv93], il présente la méthode dans le cas de l'équation de l'illumination globale. Pour un exposé complet de la méthode, il faut se reporter à [Kre99, p.197].

Nous allons utiliser les résultats du paragraphe 1.3.2 sur l'opérateur d'interpolation. Pour ce faire, on se donne sous espace vectoriel  $X_n$  de  $C(D)$  de dimension finie  $n$ , ainsi que  $n$  points  $x_1, \dots, x_n$  unisolvant pour notre espace  $X_n$ . Ceci permet de définir l'opérateur d'interpolation  $P_n : C(D) \rightarrow X_n$ .

La méthode de *collocation* est probablement la méthode la plus simple à mettre en oeuvre. Il s'agit juste de réaliser à l'aide d'une fonction  $\widehat{\varphi}_n \in X_n$  une interpolation de la fonction  $f$  en nos  $n$  points  $x_1, \dots, x_n$  de  $D$ . On force donc la fonction  $\widehat{\varphi}_n$  à valoir la même chose que  $f$ , mais uniquement en un nombre fini de points. Cela se traduit par l'équation :

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}, \widehat{\varphi}_n(x_j) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \widehat{u}_i(x_j) = f(x_j) \quad (1.47)$$

De façon plus théorique, il s'agit juste de la projection de notre équation (1.41) sur  $X_n$  grace à l'opérateur  $P_n$ , exactement comme décrit par l'équation (1.45).

Une fois écrite  $\varphi_n$  dans la base des  $u_i$  comme en 1.43, on obtient le système linéaire suivant :

$$\begin{bmatrix} \widehat{u}_1(x_1) & \dots & \widehat{u}_n(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \widehat{u}_1(x_n) & \dots & \widehat{u}_n(x_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g(x_1) \\ \vdots \\ g(x_n) \end{bmatrix} \quad (1.48)$$

---

13. Uniform boundeness principle en anglais

*Remarque.* Il est extrêmement important de comprendre que cette méthode (tout comme celle de *Galerkin*) n'est pas une méthode totalement discrète. En effet, il reste encore à calculer les coefficients  $\widehat{u}_1(x_n)$ , ce qui nécessite de calculer une intégrale. Pour ce faire, on aura classiquement recours à des méthodes de quadratures, et si on fait le choix (heureux) des points  $x_i$  comme point de quadrature pour une méthode type *Newton-Cowtes*<sup>14</sup>, alors la matrice de l'équation (1.48) de collocation est exactement la même que celle de l'équation (1.28)! Bien sûr les seconds membres ne sont pas les mêmes, mais on voit bien l'importance des méthodes de *Nyström*, qui sont plus où moins les seules à être totalement numériques (et donc auxquelles on se ramène le plus souvent).

### 1.4.3 Méthode des moindres carrés

Il s'agit là d'une méthode essentiellement *hilbertienne*, c'est à dire qu'elle met en jeu la projection de notre équation sur un espace plus petit que l'espace ambiant  $H$ .

Pour se faire, on se donne un espace vectoriel  $X_n$  de dimension finie  $n$ , de base  $u_1, \dots, u_n$ . On recherche une fonction  $\varphi_n \in X_n$  proche de notre solution  $\varphi$ . L'idée est de minimiser la *distance hilbertienne* entre  $f$  et la transformée  $\widehat{\varphi}_n$  de la fonction  $\varphi_n$  cherchée. Cela se traduit par l'énoncé : trouver  $\varphi_n \in X_n$  telle que

$$\|\widehat{\varphi}_n - f\|_{L^2(D)} = \min \left\{ \|\widehat{h} - f\|_{L^2(D)}, h \in X_n \right\} \quad (1.49)$$

L'existence d'une telle fonction, ainsi que la démarche pour la trouver nous est donné par le théorème de projection sur un convexe fermé<sup>15</sup>. On cherche en fait une fonction  $\varphi_n$  telle que sa transformée  $\widehat{\varphi}_n$  soit la projection de  $f$  sur l'espace  $\widehat{X}_n$ , espace transformé de  $X_n$ . Ceci se traduit par  $n$  relation d'orthogonalité avec les  $\widehat{u}_i$ , puisque ces derniers forment une base de  $\widehat{X}_n$  :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \langle \widehat{\varphi}_n - f, \widehat{u}_i \rangle = 0 \quad (1.50)$$

$$\Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\}, \langle \varphi_n - A\varphi_n - f, u_i - Au_i \rangle = 0 \quad (1.51)$$

Une fois écrite  $\varphi_n$  dans la base des  $u_i$  comme en 1.43, on obtient le système :

$$\begin{bmatrix} \langle \widehat{u}_1, \widehat{u}_1 \rangle & \dots & \langle \widehat{u}_n, \widehat{u}_1 \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \widehat{u}_1, \widehat{u}_n \rangle & \dots & \langle \widehat{u}_n, \widehat{u}_n \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f, \widehat{u}_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle f, \widehat{u}_n \rangle \end{bmatrix} \quad (1.52)$$

*Remarque.* Contrairement à ce que système laisse croire, l'expression des  $\langle \widehat{u}_i, \widehat{u}_j \rangle$  peut être extrêmement complexe, comme on peut le voir sur l'équation étendue (1.51). C'est pour cette raison que l'on va introduire une nouvelle classe de méthodes, beaucoup plus facile à mettre en oeuvre.

### 1.4.4 Méthode de Galerkin

Là encore, un exposé élémentaire est fait dans [Arv93], il présente la méthode dans le cas de l'équation de l'illumination globale. Pour un exposé complet de la méthode, il faut se reporter à [Kre99, p.240].

Pour exposé cette méthode, nous reprenons les notations du paragraphe précédent. La méthode de *Galerkin* est semblable à la précédente, sauf qu'elle demande des conditions moins optimales pour

14. C'est à dire en utilisant des polynômes d'interpolation de Lagrange.

15. En l'occurrence, il s'agit ici du sous espace de dimension finie  $\widehat{X}_n$ , transformé de  $X_n$ .

les fonctions  $\varphi_n \in X_n$ . Plutôt que rechercher l'orthogonalité avec l'espace transformé  $\widehat{X}_n$ , on demande simplement l'orthogonalité avec l'espace  $X_n$ . Si on note  $P_n$  l'opérateur de projection sur  $X_n$ , ces conditions se traduisent simplement par la projection de l'équation (1.41) :

$$\varphi_n - P_n A \varphi_n = P_n f \quad (1.53)$$

On peut expliciter les équations obtenues sur notre base  $u_i$  de  $X_n$  :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \langle \widehat{\varphi}_n - f, u_i \rangle = 0 \quad (1.54)$$

$$\Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\}, \langle \varphi_n - A \varphi_n - f, u_i \rangle = 0 \quad (1.55)$$

En recherchant  $\varphi_n$  par l'intermédiaire d'une combinaison linéaire comme en (1.43), ces équations se traduisent par le système :

$$\begin{bmatrix} \langle \widehat{u}_1, u_1 \rangle & \dots & \langle \widehat{u}_n, u_1 \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \widehat{u}_1, u_n \rangle & \dots & \langle \widehat{u}_n, u_n \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f, u_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle f, u_n \rangle \end{bmatrix} \quad (1.56)$$

*Remarque.* Le lecteur aura compris à ce stade que toutes les méthodes envisagées ont pour finalité un système linéaire. Cependant, il ne faut pas perdre de vue que du point de vue numérique, même si on ne prend pas en compte la précision des différentes méthodes, ces dernières ne sont pas du tout équivalentes. En effet, alors que pour les méthodes de collocation, le système est facile à déterminer, il n'en est pas de même pour le système de la méthode des moindres carrés, qui est souvent incalculable pratiquement<sup>16</sup>. C'est pour cela que l'on a introduit les méthodes de *Galerkin*, et il suffit de comparer les équation (1.51) pour les moindres carrés, et (1.55) pour *Galerkin*, pour se rendre compte du travail en moins à effectuer ...

Pour terminer, citons un théorème de convergence pour les équations du second type, que l'on peut trouver dans [Kre99, p.240] :

**Théorème 1.13.** *Soit  $A : X \rightarrow X$  un opérateur linéaire compact sur un espace de hilbert  $X$  tel que  $I - A$  soit injectif. Alors la méthode de Galerkin présentée plus haut converge pour  $I - A$ . De plus, dans ce cas, la solution coïncide avec celle fournie par la méthode des moindres carrés.*

*Remarque.* Dans le cas d'une équation quelconque (non nécessairement du second type), on a besoin d'hypothèse de coercivité, c'est à dire supposer que notre opérateur  $A$  vérifie :

$$\exists \alpha > 0, \forall \varphi \in X, \langle A \varphi, \varphi \rangle \geq \alpha \|\varphi\|^2 \quad (1.57)$$

On pourra trouver des compléments sur ces questions dans [Kre99, p.242]. On se rend bien compte de la simplicité du cas des équations du second type par rapport au cas général. Heureusement, il s'agit du cas qui nous intéresse pour étudier le transport lumineux !

Pour l'implémentation concrète de la méthode de *Galerkin*, on se rapportera au paragraphe 3.1, qui présente la méthode des éléments finis, la plus souvent employé pour obtenir un bon espace pour projeter notre équation.

---

16. Car il met en jeu des intégrales doubles sur l'ensemble du domaine.

## 2 Le transport lumineux

Dans cette partie, nous allons donner l'équation intégrale qui gouverne le transport lumineux. Cette équation dérive de l'équation de transfert radiatif, qui elle-même est une simplification des première et deuxième lois de la thermodynamique (conservation de l'énergie, qui tend vers un état d'équilibre). Dans toute la suite de l'exposé, on fait l'approximation de l'optique géométrique, à savoir que les longueurs d'onde considérées sont très petite par rapport aux longueurs des surfaces auxquelles on s'intéresse. Ceci permet de ne prendre en compte que les phénomènes de réflexion et réfraction d'ondes lumineuses non cohérentes.

### 2.1 Equations intégrale du transport lumineux

#### 2.1.1 Caractéristiques de la surface

La surface que l'on considère est caractérisée par sa capacité à absorber et transmettre le flux lumineux. Ceci se traduit par une fonction nommée *BRDF*<sup>17</sup>. Cette fonction donne la luminance<sup>18</sup>  $L$  émise dans une direction  $\Theta_r$  quand la surface reçoit une irradiance<sup>19</sup>  $E$  depuis une direction  $\Theta_i$ . Elle dépend donc des paramètres suivants :

- La position du point sur la surface,  $x$ .
- L'angle d'incidence  $\Theta_i$ .
- L'angle de réflexion  $\Theta_r$ .
- La longueur d'onde (ce qui ne sera pas pris en compte par la suite).

La fonction *BRDF*<sup>20</sup>, que l'on notera  $f_r$  est donc définie de façon différentielle comme suit :

$$f_r(x, \Theta_i \rightarrow \Theta_r) = \frac{dL(x \rightarrow \Theta_r)}{dE(x \leftarrow \Theta_i)} = \frac{dL(x \rightarrow \Theta_r)}{L(x \leftarrow \Theta_i) \cos(\theta_i) d\omega_{\Theta_i}} \quad (2.1)$$

où  $\theta_i$  est l'angle que fait la direction d'incidence avec la normale, et  $d\omega_{\Theta_i}$  est l'élément d'angle solide dans la direction  $\Theta_i$ .

On a une loi de réciprocité qui caractérise le transport lumineux :

$$f_r(x, \Theta_i \rightarrow \Theta_r) = f_r(x, \Theta_r \rightarrow \Theta_i) = f_r(x, \Theta_i \leftrightarrow \Theta_r)$$

En intégrant  $f_r$  sur un angle solide (respectivement sur toute une hémisphère), on obtient une reflectance conique (respectivement hémisphérique).

#### 2.1.2 Equation du rendu

L'équation principale qui régit la façon dont le flux lumineux se répartit sur la surface est l'équation de transfert du flux lumineux, qui se formule comme une équation intégrale à noyau. Cette équation traduit que la radiance qui arrive à la surface est réfléchié dans toutes les direction la fonction de répartition *BRDF* de la surface au point considéré.

$$L(x \rightarrow \Theta) = L_e(x \rightarrow \Theta) + \int_{\Omega_x} L(r(x, \Theta) \rightarrow -\Psi) f_r(x, \Psi \leftrightarrow \Theta) \cos(n_x \cdot \Psi) d\omega_{\Psi} \quad (2.2)$$

17. **Bidirectional Reflectance Distribution Function**

18. Flux par angle solide par unité de surface projetée, en *Watt/m<sup>2</sup>sr*.

19. Flux par unité de surface, en *Watt/m<sup>2</sup>*.

20. On remarquera qu'elle est sans dimension, mais s'exprime en *sr*, unité d'angle solide.



Cette équation est donc une équation intégrale, dont l'inconnue est  $L$ .

Voici les explications des différents termes :

- $L$  : la fonction inconnue, c'est la radiance de la surface dans une certaine direction.
- $L_e$  : la radiance émise par la surface (quantité connue, positive pour les sources lumineuses).
- $\omega_\Psi$  : angle solide dans la direction  $\Psi$ .
- $\Theta$  : direction de réflexion.
- $r(x, \Theta)$  : fonction de lancé de rayon, c'est à dire le point le plus proche de  $x$  dans la direction  $\Theta$ .
- $\Omega_x$  : l'hémisphère autour du point (pas toujours de la forme d'une demi-sphere, mais presque !).
- $n_x$  : la normal au point  $x$  considéré.

Sous une forme plus compacte, on peut utiliser un opérateur intégral  $T$  et écrire l'équation 2.5 sous la forme :

$$L(x \rightarrow \Theta) = L_e(x \rightarrow \Theta) + TL(x \rightarrow \Theta) \quad (2.3)$$

Cette équation peut être ré-écrite sous une forme qui sera plus adaptée aux calculs que l'on va devoir faire sur notre surface (lancés de rayons, etc.)<sup>21</sup>. Ceci donne naissance à la fameuse équation du rendu<sup>22</sup>. Le seule chose à faire pour l'obtenir est d'effectuer un changement de variable pour transformer l'intégrale sur des angles solides en une intégrale sur la surface avoisinante. La formule magique de changement de variable est celle qui exprime l'angle solide en fonction de la direction et de la distance<sup>23</sup>, a savoir :

$$d\omega' = \frac{|\cos(\theta)|dA(\omega')}{\|x - x'\|^2} \quad (2.4)$$

La signification des différents éléments étant la suivant :

- $x, x'$  deux points sur la surface, formant la direction  $\omega'$ .
- $\omega'$  : la direction de la lumière reflétée en  $x$ .
- $d\omega'$  : l'angle solide dans cette direction.
- $\theta$  : l'angle entre la normale en  $x$  et la direction  $\omega'$ , ie la droite  $(xx')$ .
- $\theta'$  : l'angle entre la normale en  $x'$  et la direction  $\omega'$ , ie la droite  $(xx')$ .
- $dA(x')$  : l'aire de l'élément de surface autour de  $x'$ .

On obtient au final l'équation :

$$L(x \rightarrow \omega) = L_e(x \rightarrow \omega) + \int_S L(x' \rightarrow \omega') f_r(x, \omega \leftrightarrow \omega') \frac{V(x, x') \cos(\theta) \cos(\theta')}{\|x - x'\|^2} dA(\omega') \quad (2.5)$$

Pour ne prendre en compte les directions qu'une seule fois dans l'intégrale, on n'intègre que sur les points visibles depuis la surface, d'où l'introduction d'une *fonction de visibilité*  $V$  qui renvoie 1 si les deux points sont visible l'un depuis l'autre, 0 sinon.

---

21. Tout ceci est expliqué brièvement dans [Hei97, p.3]

22. *Rendering equation* en anglais.

23. Ceci est bien expliqué dans [Hec92]

## 2.2 Equation dans le cas de la diffusion lambertienne

### 2.2.1 Cas de la réflectance diffuse

Dans la suite, on ne va considérer qu'un type de surface : les surfaces parfaitement diffuse, c'est à dire telle que la fonction  $BRDF$  soit indépendante à la fois des directions d'incidence et de réflexion. Ce modèle est celui de la *diffusion Lambertienne*.

La fonction  $BRDF$  est constante égale à  $f_{r,d}$ , et la quantité importante pour la suite est la réflectance hémisphérique,  $\rho_d = \pi f_{r,d}$ , qui ne dépend donc que du point considéré, et représente la façon dont la lumière est transmise par la surface en ce point.

### 2.2.2 Equation simplifiée correspondance

Dans le cas où la fonctions  $f_r$  du  $BRDF$  est indépendantes des directions entrantes et sortantes, l'équation intégrale de la radiosité s'écrit sous la forme :

$$L(s_1, s_2) = L_e(s_1, s_2) + \iint K(s_1, s_2, t_1, t_2) L(t_1, t_2) dt_1 dt_2$$

où le noyau  $K$  de l'intégrale s'exprime comme suit :

$$K(s_1, s_2, t_1, t_2) = \rho(s_1, s_2) \frac{\cos(\theta_s) \cos(\theta_t)}{\pi r_{st}^2} V(s, t)$$

Voici l'explication des différents termes :

- $L$  : toujours la radiance, mais cette fois ci, elle dépend seulement de la position.
- $L_e$  : la radiance émise par la surface.
- $\theta_s$  : angle que fait la droite ( $st$ ) avec la normale en  $s$ .
- $\theta_t$  : angle que fait la droite ( $st$ ) avec la normale en  $t$ .
- $r_{st}$  : distance entre les points  $s$  et  $t$ .
- $V(s, t)$  : fonction de visibilité : 1 si le point  $s$  est visible depuis  $t$ , 0 sinon.

## 3 Discrétisation du problème

### 3.1 Méthodes par éléments finis

Pour une présentation succincte des méthodes des éléments finis appliquées à l'illumination globale, on pourra se référer à [Hec93b], [Hec93a]. Pour un exposé complet incluant une analyse de la convergence, la référence reste [RT93, p.104].

La méthode des éléments finis est en fait une méthode de *Galerkin* appliquée à des espaces d'approximation particuliers. En effet, il s'agit ici de définir un maillage de notre surface (ie un découpage polygonal), et de prendre des fonctions qui seront polynômiales à l'intérieur d'un polygone donné, et nulles à l'extérieur. Cette méthode est très puissante car elle permet de prendre en compte les phénomènes locaux propres à chaque problème, et d'adapter le maillage aux propriétés de ce problème (discontinuités, etc.). Ceci est totalement différent des méthodes comme l'analyse spectrale de *Fourier*, qui utilisent des fonctions très globales, et qui ne permettent pas de prendre en compte les singularités de notre équation.

## 3.2 Éléments finis de Lagrange

On a déjà vu des résultats généraux d'interpolation, il s'agit maintenant de décrire comment les utiliser de façon numérique, ce qui donne naissance aux méthodes d'éléments finis, dont nous décrivons ici deux types. Une exposé complet des différentes méthodes d'interpolation sur des maillages simpliciaux et parallélotopes est réalisé dans [RT93, p.79].

### 3.2.1 Éléments finis simpliciaux

On prend pour  $K$  un  $n$  simplexe de  $\mathbb{R}^n$ , sur lequel on définit les coordonnées barycentriques  $\{\lambda_i\}_{i=1}^{n+1}$ . Pour  $k \geq 0$  on considère  $P_k$  l'espace des polynômes de degré inférieur à  $k$ , de dimension  $C_{n+k}^k$ , ainsi que l'ensemble :

$$\Sigma_k = \{x \in \mathbb{R}^N; \forall i \in \{1, \dots, n+1\}, \lambda_i(x) \in \{0, 1/k, \dots, 1-1/k, 1\}\} \quad (3.1)$$

On peut montrer que  $\Sigma_k$  est unisolvant pour  $P_k$ .

**Exemple 3.1.** Dans le cas de  $\mathbb{R}^2$  ( $K$  est alors un triangle), pour  $P_0$  (polynômes constants) cela revient à interpoler au centre du triangle, pour  $P_1$  sur les trois sommets, et pour  $P_2$  sur les trois sommets et les trois milieux des côtés.

### 3.2.2 Éléments finis parallélotopes

## 3.3 Equations linéaires obtenues

### 3.3.1 Méthode de collocation

C'est la méthode la plus simple, elle met seulement en jeu le calcul de :

$$\hat{u}_i(x_j) = u_i(x_j) - (Au_i)(x_j) \quad (3.2)$$

où  $A$  est l'opérateur à noyau de la radiosité.

Pour faire les calculs, on subdivise notre surface en carrés  $P_1, \dots, P_n$ , et l'on choisit comme points d'interpolations les centres  $s_i$  des carrés  $P_i$ .

On est donc amené à calculer ce que l'on appelle les facteurs de forme, et qui s'écrivent :

$$F_{ij} = (Au_i)(x_j) = \int_{P_i} \frac{\cos(\theta_1) \cos(\theta_2)}{\pi r^2} vis(s_j, s) ds \quad (3.3)$$

Pour obtenir cette formule, on a juste changé l'intégrale sur l'angle solide de l'hémisphère en un calcul sur la surface de  $P_i$ , et l'on a noté  $\theta_1$  (respectivement  $\theta_2$ ) l'angle entre la droite  $(s, s_j)$  et  $P_i$  (respectivement  $P_j$ ). La fonction  $vis$  revoie 1 si les deux points sont visible l'un par rapport à l'autre, 0 sinon.

Au final, le système linéaire obtenu est :

$$\begin{bmatrix} 1 - \rho_1 F_{11} & -\rho_1 F_{12} \dots & -\rho_1 F_{1n} \\ -\rho_2 F_{21} & 1 - \rho_2 F_{22} \dots & -\rho_2 F_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ -\rho_n F_{n1} & -\rho_n F_{n2} \dots & 1 - \rho_n F_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_n \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Où l'on a noté  $\rho_i$  les réflectances aux points  $s_i$ ,  $B_i$  la valeur de la luminance à ces points (c'est ce qu'on cherche à calculer),  $E_i$  la luminance auto-émise en ces points, et enfin  $F_{ij}$  le facteur de forme entre les points  $s_i$  et  $s_j$ .

### 3.3.2 Méthode de Galerkin

Les quantités à calculer pour résoudre le système sont les

$$\langle \widehat{u}_i, u_j \rangle = \langle u_i, u_j \rangle - \langle Au_i, u_j \rangle \quad (3.5)$$

On a donc à calculer une intégrale double, mais ceci est grandement facilité par le fait que l'on intègre  $Au_i$  contre une fonction à support très local,  $u_j$ .

Pour calculer ces différents facteurs, que l'on nomme généralement *facteurs de couplage* pour la méthode de *Galerkin*, on va utiliser des techniques de quadrature numériques, qui seront discutées au prochain paragraphe.

On peut se demander pourquoi la technique des moindres carrés n'est pas employée. Ceci est du au calcul des quantités :

$$\langle \widehat{u}_i, \widehat{u}_j \rangle = \langle u_i, u_j \rangle - \langle Au_i, u_j \rangle - \langle u_i, Au_j \rangle + \langle Au_i, Au_j \rangle \quad (3.6)$$

Or, contrairement aux calculs effectués pour la méthode de *Galerkin*, ne peut pas tirer parti du caractère local des  $u_i$ , à cause du terme  $\langle Au_i, Au_j \rangle$ .

## 3.4 Méthodes itératives de résolution de système linéaires

Tout d'abord, donnons un bref rappel théorique des méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires. Tout ceci est bien expliqué dans [Cia90, P.95], excepté pour la méthode de *Southwell*, où il faudra regarder [GCS93].

### 3.4.1 La théorie

Le but est résoudre le système linéaire  $Au = b$ , où  $A$  est une matrice de  $M_n(\mathbb{K})$ ,  $\mathbb{K}$  pouvant être  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ,  $b$  et  $u$  étant des vecteurs de  $\mathbb{K}^n$ . On ne veut pas calculer d'un coup la solution, mais l'approximer par une suite d'opérations simples à réaliser. L'idée de base est d'inverser partiellement le système, et de recommencer ainsi jusqu'à obtenir une bonne précision<sup>24</sup>. On obtiendra ainsi une suite de vecteurs  $u^{(k)} \in \mathbb{K}^n$  s'approchant de plus en plus notre solution.

Pour ce faire, supposons que l'on dispose d'une décomposition  $A = M - N$ , la matrice  $M$  étant supposée inversible et surtout facile à inverser (c'est la partie du système que l'on va inverser). Alors notre problème devient  $u = (M^{-1}N)u + M^{-1}b$ , soit sous une forme plus concise  $u = Bu + c$ , avec  $B = M^{-1}N$  et  $c = M^{-1}b$ . On a donc mis notre problème sous la forme d'un problème de point fixe pour la fonction  $u \mapsto Bu + c$ , et l'on pourra le résoudre par itération successive à la condition que  $\|B\| < 1$  pour au moins une norme matricielle, ou de manière équivalente, que  $\rho(B) < 1$ , où  $\rho(B)$  désigne le plus grand module des valeurs propres de  $B$ .

Les différents choix possibles pour la décomposition de  $M$  vont mener à différentes méthodes classiques de résolution, que nous allons maintenant détailler.

### 3.4.2 Méthode de Jacobi

Cette méthode est la plus simple, puisqu'on décide, à chaque itération, de n'inverser que la diagonale de la matrice. Ceci correspond à une décomposition  $A = D - E - F$ , avec  $D$  la diagonale de  $A$ ,  $E$

---

24. La convergence étant souvent géométrique, un bon critère est la différence entre deux résultats consécutifs.

l'opposé de sa partie supérieure, et  $F$  l'opposée de sa partie inférieure. Une itération de la méthode de *Jacobi* s'écrit donc :

$$Du^{(k+1)} = (E + F)u^{(k)} + b \quad (3.7)$$

Si l'on écrit  $u_k$  sous la forme  $(u_i^{(k)})_{i=1}^n$ , on obtient une itération par la formule :

$$u_i^{(k+1)} = b_i - \frac{1}{a_{ii}} \sum_{j \neq i} u_j^{(k)} a_{ij} \quad (3.8)$$

### 3.4.3 Méthode de Gauss-Seidel

La méthode de *Gauss-Seidel* est à la fois plus simple à mettre en oeuvre et plus efficace. Elle repose sur la constatation que l'itération dans la méthode de *Jacobi* nécessite, pour calculer  $u_i^{(k+1)}$ , tous les éléments  $(u_j^{(k)})_{j=1}^{i-1}$ . Pourquoi ne pas utiliser, à la place de ces éléments les éléments  $(u_j^{(k+1)})_{j=1}^{i-1}$ , fraîchement calculés ?

Cette constatation donne naissance à la méthode de *Jacobi*, qui est donc très naturelle, puisque, lorsqu'on la programme, elle permet de n'utiliser qu'un seul vecteur  $u^{(0)}$  pour stocker les différents résultats  $u^{(k)}$ , en effet, un nouvel élément  $u_i^{(k+1)}$  vient écraser l'élément  $u_i^{(k)}$  calculé à l'itération précédente. Cette méthode correspond au choix de  $D - E$  comme matrice à inverser (c'est à dire la partie inférieure), ce qui permet d'écrire une itération sous la forme  $(D + E)u^{(k+1)} = Fu^{(k)} + b$ , ou, sous forme étendue :

$$u_i^{(k+1)} = b_i - \frac{1}{a_{ii}} \left( \sum_{j < i} u_j^{(k+1)} a_{ij} + \sum_{j > i} u_j^{(k)} a_{ij} \right) \quad (3.9)$$

### 3.4.4 Méthode de Southwell

La méthode de *Southwell* est la plus sophistiquée des trois. Plutôt que de calculer les  $u_i^{(k)}$  par ordre des  $i$  croissants (procédé que l'on nomme relaxation de la  $i^{eme}$  composante), on décide de relaxer à chaque fois la composante qui possède le résidu  $r_i^{(k)} = b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} u_j^{(k)}$  le plus grand.

Intuitivement, cette méthode doit forcément mieux marcher, mais se pose le problème de la détermination du plus grand  $r_i^k$ , puisque le calcul de tous les résidus devrait prendre  $O(n^2)$  opérations. En fait, il n'en est rien. En effet, si on note  $\Delta u^{(k)} = u^{(k+1)} - u^{(k)}$ , on obtient  $r^{(k+1)} = r^{(k)} - A\Delta u^{(k)}$ . Comme  $\Delta u^{(k)}$  est un vecteur composé que de zéros, excepté à la place  $i$  choisie à la dernière itération, on a en fait une expression extrêmement simple :

$$r_j^{(k+1)} = r_j^{(k)} - \frac{a_{ji}}{a_{ii}} r_i^{(k)} \quad (3.10)$$

Ce calcul se fait en  $O(n)$ , et la seule chose à faire est d'initialiser  $r^{(0)}$ , ce qui est généralement trivial, par exemple, pour  $u^{(0)} = 0$ , on a  $r^{(0)} = b$ .

## 3.5 Les algorithmes de radiosité

En mettant en oeuvre ces différentes méthodes, on trouve les différents algorithmes "canoniques" de radiosité.

### 3.5.1 Algorithme de radiosité classique

Cet algorithme n'est rien d'autre que l'application directe de la méthode de *Gauss-Seidel* pour résoudre le système de la radiosité, dont on rappelle ici l'énoncé :

$$\begin{bmatrix} 1 - \rho_1 F_{11} & -\rho_1 F_{12} \dots & -\rho_1 F_{1n} \\ -\rho_2 F_{21} & 1 - \rho_2 F_{22} \dots & -\rho_2 F_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ -\rho_n F_{n1} & -\rho_n F_{n2} \dots & 1 - \rho_n F_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_n \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Cet algorithme peut donc se résumer en quelques lignes :

```

1  pour tous les i
2     $B_i = E_i$ 
3  tant que la précision voulue n'est pas atteinte
4    pour tous les i les uns après les autres
5       $B_i = E_i + \rho_i * \sum_{j \neq i} B_j * F_{ij}$ 
6    dessiner une image avec les  $B_i$  temporaires

```

### 3.5.2 Algorithme de radiosité progressive

Cette fois, on applique l'algorithme de *Southwell*, en lui apportant une légère modification d'ordre algorithmique, puisqu'à chaque itération, on distribue de l'énergie à tous les autres carrés.

```

1  pour tous les i
2     $B_i = E_i$ 
3     $\Delta B_i = E_i$ 
4  tant que la précision voulue n'est pas atteinte
5    choisir  $i$  tel que  $\Delta B_i A_i$  soit minimal
6    pour tous les i les uns après les autres
7       $\Delta rad = \Delta B_i * \rho_j * F_{ji}$ 
8       $\Delta B_j = \Delta B_j + \Delta rad$ 
9       $B_j = B_j + \Delta rad$ 
10    $\Delta B_i = 0$ 
11   dessiner une image avec les  $B_i$  temporaires

```

Intuitivement, les  $\Delta B_i$  correspondent à l'énergie lumineuse que le carré  $i$  peut encore envoyer. C'est cette quantité d'énergie qui est distribuée à tous les autres carrés. La stratégie est donc ici totalement différente. Alors que dans l'algorithme de radiosité classique on rassemble l'énergie provenant des autres carrés, ici on distribue l'énergie, ce qui présente l'avantage certain de pouvoir distribuer en priorité l'énergie du carré le plus lumineux. Cette différence de tactique se traduit par une utilisation différente de la matrice : alors que pour la radiosité classique on utilise les lignes, ici on utilise les colonnes de la matrice.

## 4 Formules de quadrature numériques [Dem96, p.59]

### 4.1 Méthode élémentaires et composées

On considère une subdivision  $\alpha = \alpha_0 < \dots < \alpha_k = \beta$  de l'intervalle  $[\alpha, \beta]$ . Pour chaque intervalle  $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ , on construit une méthode de quadrature élémentaire de la forme :

$$\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(x)dx \simeq (\alpha_{i+1} - \alpha_i) \sum_{j=0}^{l_i} \omega_{ij} f(\xi_{ij}) \quad (4.1)$$

avec  $\xi_{ij} \in [\alpha_i, \alpha_{i+1}]$  et  $\sum_{j=0}^{l_i} \omega_{ij} = 1$ . Cette formule élémentaire donne naissance à une méthode composée :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{k-1} (\alpha_{i+1} - \alpha_i) \sum_{j=0}^{l_i} \omega_{ij} f(\xi_{ij}) \quad (4.2)$$

**Définition 4.1.** ORDRE D'UNE MÉTHODE La méthode sera dite d'ordre  $N$  si elle est exacte pour les polynômes de degrés inférieur à  $N$ , et inexacte pour au moins un polynôme de degrés plus élevé.

Dans la suite de ce paragraphe, on ré-écrit la formule (4.2) sous la forme :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \simeq \sum_{j=0}^l \lambda_j f(x_j) \quad (4.3)$$

On introduit aussi l'erreur d'interpolation :

$$E(f) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx - \sum_{j=0}^l \lambda_j f(x_j) \quad (4.4)$$

**Définition 4.2.** NOYAU DE PEANO On définit le noyau de *Peano* de la méthode par la formule :

$$\forall t \in [\alpha, \beta], K_N(t) = E(x \mapsto (x-t)_+^N) \quad (4.5)$$

**Théorème 4.1.** CONVERGENCE D'UNE MÉTHODE COMPOSÉE *On suppose que la méthode est d'ordre  $N$  et que la fonction  $f$  est de classe  $C^{N+1}$ . Alors on a :*

$$E(f) = \frac{1}{N!} \int_{\alpha}^{\beta} K_N(t) f^{(N+1)}(t) dt \quad (4.6)$$

Si  $K_N$  est de signe constant, on a la majoration :

$$|E(f)| \leq \frac{1}{(N+1)!} \|f^{(N+1)}\|_{\infty} E(x \mapsto x^{(N+1)}) \quad (4.7)$$

## 4.2 Méthodes de Newton-Cotes [Dem96, p.62]

La méthode de *Newton-Cotes* de rang  $l$  est obtenue en remplaçant l'intégrale de  $f$  sur  $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$  par celle de son polynôme d'interpolation de *Lagrange* sur une subdivision régulière en  $l + 1$  points de l'intervalle. Pour expliciter les formules, on va se placer sur l'intervalle  $[-1, 1]$ , puis on se ramènera à l'intervalle  $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$  par une transformation affine.

Soit  $f \in \mathcal{C}([-1, 1])$  et  $p_l$  le polynôme d'interpolation de *Lagrange* aux points équidistants  $\tau_j$  de  $[-1, 1]$ , donné par la formule :

$$p_l(x) = \sum_{j=0}^l f(\tau_j) L_j(x) \quad \text{avec :} \quad (4.8)$$

$$L_j(x) = \prod_{k \neq j} \frac{x - \tau_k}{\tau_j - \tau_k} \quad (4.9)$$

où on a noté  $L_j$  le  $j$ -ième polynôme de base de *Lagrange*.

La méthode de *Newton-Cotes* de rang  $l$  est définie par :

$$\int_{-1}^1 f(t) dt \simeq 2 \sum_{j=0}^l \omega_j f(\tau_j) \quad \text{avec :} \quad (4.10)$$

$$\omega_j = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 L_j(t) dt \quad (4.11)$$

**Théorème 4.2.** *L'ordre de la méthode est  $l$  si  $l$  est impair, et  $l + 1$  sinon. Pour une fonction  $f$  de classe  $C^{N+1}$ , on a la majoration :*

$$|E(f)| \leq \frac{C_N}{N! 2^{N+2}} h^{N+1} \|f^{(N+1)}\| (\beta - \alpha) \quad (4.12)$$

où  $C_N$  est une constante indépendante de  $h$ , le pas de subdivision.

## 4.3 Méthode d'intégration de Gauss

### 4.3.1 Polynômes orthogonaux [Dem96, p.51]

Soit  $w : ]\alpha, \beta[ \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  une fonction continue telle que  $\forall n, \int_{\alpha}^{\beta} |x|^n w(x) dx < +\infty$ . On considère l'espace vectoriel  $E$  des fonctions de module carré intégrable pour le poids  $w(x)$ , muni du produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) g(x) w(x) dx \quad (4.13)$$

**Théorème 4.3.** *Il existe une unique suite  $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de polynômes unitaires deux à deux orthogonaux pour  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . De plus, ces polynômes sont donnés par la relation de récurrence :*

$$p_n(x) = (x - \lambda_n) p_{n-1}(x) - \mu_n p_{n-2}(x) \quad \text{avec :} \quad (4.14)$$

$$\lambda_n = \frac{\langle x p_{n-1}, p_{n-1} \rangle}{\|p_{n-1}\|^2} \quad \text{et :} \quad (4.15)$$

$$\mu_n = \frac{\|p_{n-1}\|^2}{\|p_{n-2}\|^2} \quad (4.16)$$

Enfin,  $p_n$  a  $n$  racines simples distinctes dans  $]a, b[$ .



### 4.3.2 Méthodes de Gauss [Dem96, p.73]

On cherche une formule approchée de la forme :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)w(x)dx \simeq \sum_{j=0}^l \lambda_j f(x_j) \text{ pour } x_j \in [\alpha, \beta] \quad (4.17)$$

**Théorème 4.4.** *Il existe un choix et un seul des points  $x_j$  et des poids  $\lambda_j$  de sorte que la méthode soit d'ordre  $N = 2l + 1$ . Les points  $x_j$  sont alors les racines du  $(l + 1)$ -ième polynôme orthogonal pour le poids  $w$  sur  $]\alpha, \beta[$ .*

*Remarque.* Les méthodes sont très puissantes à la fois parcequ'elles ont un ordre élevé, mais aussi parcequ'elle intègrent directement un poids  $w$  qui peut par exemple présenter des singularités sur le bord de l'intervalle. La seule restriction est de devoir calculer au préalable les racines des polynômes orthogonaux correspondants.

### 4.3.3 Explication de la démarche

Pour comprendre pourquoi est-ce que l'on est amené à choisir les zéros des polynômes orthogonaux comme points d'interpolation, il faut étudier de plus près la formule d'erreur correspondant à la méthode issue du choix de  $N + 1$  points d'interpolation.

Si on note  $P_N$  le polynôme d'interpolation de  $f$  aux points  $x_0 < \dots < x_N$ , alors, on peut utiliser les différences divisées définies de la manière suivante (cf. [Dem96, p.24]) :

$$f[x_i] = f(x_i) \quad (4.18)$$

$$f[x_0, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0} \quad (4.19)$$

on a alors une expression du polynôme d'interpolation de *Lagrange* :

$$p_n(x) = \sum_{k=1}^n f[x_0, \dots, x_k] \pi_k(x) \quad \text{avec :} \quad (4.20)$$

$$\pi_k(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_k) \quad (4.21)$$

et surtout un résultat fondamental :

$$f(x) - P_N(x) = f[x_0, \dots, x_N, x] \pi_N(x) \quad (4.22)$$

En effet, avec le théorème de *Rolle*, ceci permet d'affirmer que :

$$\exists \xi_x \in ]\alpha, \beta[, f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(N+1)}(\xi_x)}{(N+1)!} \pi_N(x), \quad \text{d'où} \quad (4.23)$$

$$E(f) = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - P_N(x)) dx = \frac{1}{(N+1)!} \int_{\alpha}^{\beta} f^{(N+1)}(\xi_x) \pi_N(x) dx \quad (4.24)$$

Tout ces calculs permettent, entre autre, de démontrer les vitesses de convergence pour les méthodes de *Newton-Cotes*. Cependant, ils permettent aussi et surtout d'élaborer des méthodes plus performantes

par la remarque suivante : si le polynôme  $\pi_N$  est tel que  $\int_{\alpha}^{\beta} \pi_N(t) dt = 0$ , alors, si on introduit un nouveau point de subdivision  $x_{N+1}$ , on peut exploiter la formule des différences divisées :

$$f[x_0, \dots, x_N, x] = f[x_0, \dots, x_N, x_{N+1}] + (x - x_{N+1})f[x_0, \dots, x_N, x_{N+1}, x] \quad (4.25)$$

ce qui permet d'augmenter l'ordre de la méthode, grace à la formule :

$$E(f) = \int_{\alpha}^{\beta} f[x_0, \dots, x_N, x] \pi_N(x) dx \quad (4.26)$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} f[x_0, \dots, x_N, x_{N+1}, x] \pi_{N+1}(x) dx \quad (4.27)$$

Maintenant, il suffit de remarquer que si l'on a pu choisir le point  $x_{N+1}$  tel que  $\int_{\alpha}^{\beta} \pi_{N+1}(t) dt = 0$ , alors on peut recommencer ! Et jusqu'ou peut on aller ? Et bien le choix optimal est celui tel que le polynôme  $\pi_N$  qui correspond aux choix des  $N+1$  premiers points (ceux qui détermine la méthode) soit orthogonaux aux polynômes "ajoutés", ie les  $\prod_{i=N+1}^{N+k} (x - x_i)$ . Ceci signifie donc que notre polynôme  $\pi_N$  doit être orthogonaux aux plus possible d'espaces  $E_{N+k}$  des polynômes de degré inférieur à  $n+k$ . Donc le choix optimal est celui des polynômes orthogonaux de *Legendre*, qui sont orthogonaux à tous les polynômes de degré inférieur à  $N$ .

Bien sûr ce raisonnement marche aussi avec des intégrales comportant un poids  $w$ , ce qui conduit aux polynômes orthogonaux pour le poids utilisé.

#### 4.4 Méthode d'intégration de Romberg [Dem96, p.83]

La méthode de *Romberg* est basée sur une accélération de convergence de la méthode des trapèze. Décrivons tout d'abord le procédé de *Richardson* qui est à la base de cette accélération.

##### 4.4.1 Extrapolation de Richardson

Le but est de calculer une certaine valeur  $a_0$ . On suppose que l'on a déjà un algorithme qui permet d'approcher cette valeur, via le calcul d'une quantité  $A(t_m)$  pour une suite de valeurs  $t_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$ . Bien sûr, on suppose que  $A(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} a_0$ . Si on suppose que la fonction  $A(t)$  admet un développement limité en 0 à tout ordre de la forme :

$$A(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_k t^k + R_{k+1}(t) \quad \text{avec } |R_{k+1}(t)| \leq C_{k+1} |t|^{k+1} \quad (4.28)$$

Alors, si on se donne  $r > 1$  fixé, on peut gagner des ordres dans la vitesse de convergence en calculant successivement des quantité  $A_i(t)$  par les formules :

$$A_0(t) = A(t) \quad (4.29)$$

$$A_1(t) = \frac{r A_0(t) - A_0(rt)}{r - 1} \quad (4.30)$$

$$\dots \quad (4.31)$$

$$A_n(t) = \frac{r^n A_{n-1}(t) - A_{n-1}(rt)}{r^n - 1} \quad (4.32)$$

de sorte que l'on ait  $A_n(t) = a_0 + O(t^{n+1})$ .

Dans la pratique, notre algorithme de départ (celui que l'on cherche à accélérer) nous permet d'obtenir les valeurs  $A_{m,0} = A(r^{-m}t_0)$  pour un  $t_0 > 0$  fixé, et un  $r > 1$ . Ensuite, le procédé de *Richardson* consiste à calculer les valeurs de  $A_{m,n} = A_n(r^{-m}t_0)$  par la formule doublement récurrente :

$$A_{m,n} = \frac{r^n A_{m,n-1} - A_{m-1,n-1}}{r^n - 1} \quad (4.33)$$

Ce qui donne naissance à un algorithme qui consiste à calculer "en triangle", c'est à dire à calculer à stocker dans un tableau les valeurs  $A_{0,0}, \dots, A_{r,0}$  (grâce à l'algorithme initial), puis à remplacer ces valeurs par  $A_{1,1}, \dots, A_{r,1}$  par la formule (4.33), et ainsi de suite. A chaque nouvelle itération, on obtient un nouveau tableau d'indice  $m$  qui a un ordre de convergence en  $r^{-(m+1)}$ .

#### 4.4.2 Méthode de Romberg

Le but est d'appliquer l'accélération de *Richardson* au calcul de  $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt$ , en accélérant la méthode des trapèzes. On se donne donc  $f \in \mathcal{C}([\alpha, \beta])$ , un pas de discrétisation  $h = \frac{\beta - \alpha}{l}$ , où  $l$  est un entier. On note la somme des trapèzes d'indice  $l$  sous la forme :

$$T_f(h) = h \left\{ \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} + \sum_{j=1}^{l-1} f(\alpha + jh) \right\} = h \left( \frac{1}{2}f(\alpha) + f(\alpha + h) + f(\beta - h) + \frac{1}{2}f(\beta) \right) \quad (4.34)$$

Pour utiliser le procédé de *Richardson*, on a besoin de montrer que la fonction  $T_f$  admet un développement limité à tout ordre en 0, ce qui est conséquence de la formule d'*Euler-Maclaurin*, et est résumé dans le résultat suivant :

**Théorème 4.5.**  *$T_f$  admet le développement limité suivant en 0 :*

$$T_f(h) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \sum_{m=1}^{k-1} a_m h^{2m} + O(h^{2k}) \quad (4.35)$$

$$\text{avec : } a_m = \frac{b_{2m}}{(2m)!} \left( f^{(2m-1)}(\beta) - f^{(2m-1)}(\alpha) \right) \quad (4.36)$$

où les  $b_{2m}$  sont les nombres de Bernoulli, définis par  $b_p = B_p(0)$ , avec le polynôme  $B_p$  défini par récurrence de la manière suivante :

$$B_0(x) = 1 \quad (4.37)$$

$$B'_p(x) = pB_{p-1}(x), \quad \int_0^1 B_p(x)dx = 0 \quad (4.38)$$

*Remarque.* La formule d'*Euler-Maclaurin* s'obtient en intégrant par partie plusieurs fois la relation :

$$\frac{f(0) - f(1)}{2} = \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 B_1(x)f'(x)dx \quad (4.39)$$

en choisissant bien sûr  $B_p$  comme primitive de  $pB_{p-1}$ .

Comme le développement de  $T_f$  ne comporte que des termes pairs, on peut appliquer le procédé de *Richardson* à la fonction  $A(t) = T_f(\sqrt{t})$ . Dans la pratique, on calcul généralement la somme des trapèzes avec un pas  $h = \frac{\beta - \alpha}{2^m}$  (le pas le plus simple qui permette la progression géométrique requise

par le procédé de *Richardson*). Ceci revient donc à choisir  $r = 4 > 1$  et  $t_0 = (\beta - \alpha)^2$ , puisqu'il nous faut calculer :

$$A_{m,0} = T_f \left( \frac{\beta - \alpha}{2^m} \right) = A(4^{-m}(\beta - \alpha)^2) \quad (4.40)$$

Le procédé de *Richardson* conduit donc à l'algorithme suivant :

$$A_{m,n} = \frac{4^n A_{m,n-1} - A_{m-1,n-1}}{4^n - 1} \quad (4.41)$$

et l'on a  $A_{m,n} = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + O(h^{2k})$ .

*Remarque.* Une fois calculé  $A_{m-1,0}$ , il ne reste que la moitié du travail, puisque la nouvelle subdivision reprend pour moitié les points de la précédente.

*Remarque.* Alors que  $A_{m,0}$  correspond à la méthode des trapèzes (*Newton-Cotes* rang 1, ordre 1),  $A_{m,1}$  à *Newton-Cotes* au rang 2 (ordre 3) et  $A_{m,2}$  à *Newton-Cotes* au rang 4 (ordre 5), on peut vérifier que ce n'est plus le cas pour les itérations plus grandes (d'où la puissance de la méthode).

## Références

- [Arv93] James Arvo. *Linear operators and integral equations in global illumination*. Cornell University, 1993.
- [Bre83] Haïm Brezis. *Analyse fonctionnelle*. Dunod, 1983.
- [Cia90] Philippe G. Ciarlet. *Introduction à l'analyse numérique et à l'optimisation*. Dunod, 1990.
- [Dem96] Jean-Pierre Demailly. *Analyse numérique et équations différentielles*. Presses Universitaires de Grenoble, 1996.
- [GCS93] Steven Gortler, Michael F. Cohen, and Philipp Slusallek. *Radiosity and relaxation methods*. Princeton University, 1993.
- [Hec92] Paul S. Heckbert. *Introduction to global illumination*. SIGGRAPH '92, 1992.
- [Hec93a] Paul S. Heckbert. *Finite element method for radiosity*. Carnegie Mellon University, SIGGRAPH '93, 1993.
- [Hec93b] Paul S. Heckbert. *Introduction to finite element methods*. Carnegie Mellon University, SIGGRAPH '93, 1993.
- [Hei97] A. Heirich. *Global illumination and Monte Carlo*. 1997.
- [Kre99] Rainer Kress. *Linear integral equations*. Springer Verlag, 1999.
- [Pey01] Gabriel Peyré. *Méthodes de projection pour les équations intégrales*. Université Rennes 1, 2001.
- [RT93] Pierre-Arnaud Raviart and Jean-Marie Thomas. *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Dunod, 1993.