Sorbonne Université — Licence de Mathématiques L2

2MA241 – Introduction aux probabilités — Année 2020–2021

Feuille de TD n° 1. Ensembles, dénombrement et dénombrabilité.

Un cœur ♡ désigne un exercice important (à savoir faire), un pique ♠ désigne un exercice difficile.

Théorie des ensembles

Exercice 1.1. Pour un polynôme $Q \in \mathbb{Q}[X]$, on note $E_Q = \{x \in \mathbb{C};\, Q(x) = 0\}$ l'ensemble des racines de Q. Comment s'appelle l'ensemble $\mathcal{A} = \bigcup_{Q\in\mathbb{Q}[X],Q\neq 0} E_Q$? L'union est-elle disjointe ?

♡ **Exercice 1.2.** On considère l'ensemble $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeur dans $\mathbb{R}$.

a) Décrire avec des mots, sans utiliser *il existe* ni *pour tout*, les ensembles suivants :
$A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\{u \in E\,;\, u_n \in \{0, 1\}\}$;
$B = \bigcap_{M\in\mathbb{R}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{m\geq n}\{u \in E\,;\, u_m \geq M\}$;
$C = \bigcup_{M\in\mathbb{R}} \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\{u \in E\,;\, u_n \geq M\}$.

b) Réciproquement, faire l'opération de traduction inverse pour les parties suivantes de E :
F l'ensemble des suites stationaires (c'est-à-dire constantes à partir d'un certain rang) ;
G l'ensemble des suites qui convergent (bonus : essayer de n'utiliser que des intersections et unions dénombrables).

♡ **Exercice 1.3.** Soient A, B des parties d'un ensemble Ω. Dire, pour chacune des fonctions suivantes, si elle est la fonction indicatrice d'une partie de Ω, et si oui, préciser laquelle :

$$a)\ \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B, \qquad b)\ \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B, \qquad c)\ |\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B|,$$
$$d)\ \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B, \quad e)\ \max(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B), \quad f)\ \min(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B).$$

♠ **Exercice 1.4.** Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des parties d'un ensemble E.

a) Montrer que $\mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^n A_i} = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - \mathbb{1}_{A_i})$.

b) En déduire que $\mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} \sum_{\{i_1,\ldots,i_k\}\subset\{1,\ldots,n\}} \mathbb{1}_{A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}}$.

Exercice 1.5. Soient E et F deux ensembles, f une application de E dans F, et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de sous-ensembles de F.

a) Montrer que $f^{-1}\big(\bigcup_{i\in I} A_i\big) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(A_i)$ et que $f^{-1}\big(\bigcap_{i\in I} A_i\big) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(A_i)$.

b) Montrer que $f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$.

Dénombrement

Exercice 1.6. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$.

Exercice 1.7. Soient n, k des entiers naturels.

a) Montrer que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\binom{k+i}{i} = \binom{n+k+1}{n}$.

b) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\prod_{j=1}^{k}(i+j)$.

Exercice 1.8. Dans un sac de n billes numérotées de 1 à n on tire simultanément (= sans remise, sans ordre) k billes. Déterminer

a) le nombre total de tirages ;

b) le nombre de tirages contenant la bille 1 ;

c) le nombre de tirages ne contenant pas la bille 1.

Exercice 1.9. Pour deux entiers $i \le j$, on utilise la notation $[\![i,j]\!]$ pour désigner l'intervalle discret $\{i, i+1, \dots, j-1, j\}$.

a) Dénombrer l'ensemble $\Omega_n = \left\{[\![i,j]\!], 1 \le i \le j \le n\right\}$ des sous-intervalles de $[\![1,n]\!]$.

b) Pour $x \in [\![1,n]\!]$, combien y a-t-il de sous-intervalles discrets de $[\![1,n]\!]$ qui contiennent x ?

♠ **Exercice 1.10.** De combien de façons peut-on mettre n boules numérotées dans k urnes ? De combien de façons peut-on mettre n boules identiques dans k urnes ?

Dénombrabilité

♡ **Exercice 1.11.** Soit Ω un ensemble.

a) Montrer que Ω n'est pas en bijection avec $\mathcal{P}(\Omega)$.
Indication : par l'absurde. Pour $\varphi : \Omega \to \mathcal{P}(\Omega)$, introduire l'ensemble $\{\omega, \omega \notin \varphi(\omega)\}$.

b) En déduire que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.

Exercice 1.12. Soit $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}} := \{\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \sigma \text{ bijective}\}$ l'ensemble des permutations de $\mathbb{N}$.

a) On définit une application $\varphi : A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mapsto \sigma_A$, où σ_A est la fonction définie par

$$\begin{cases} \sigma_A(2n) = 2n, \quad \sigma_A(2n+1) = 2n+1 & \text{si } n \in A\,, \\ \sigma_A(2n) = 2n+1, \quad \sigma_A(2n+1) = 2n & \text{si } n \notin A\,. \end{cases}$$

Montrer que φ est une injection de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ dans $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$.

b) En déduire que $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable.

Exercice 1.13. Déterminer si les ensembles suivants sont dénombrables ou non :

a) L'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers ;

b) L'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$;

c) L'ensemble $\mathcal{A}$ des nombres algébriques (voir Exercice 1.1) ;

d) L'ensemble $\mathcal{M}$ des mots (finis) constitués de lettres d'un alphabet fini A ;

e) L'ensemble $\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ des parties finies de $\mathbb{N}$;

f) L'ensemble $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeur dans $\{0,1\}$;

g) L'ensemble des nombres calculables [*].

[*]. Un nombre calculable est un réel pour lequel il existe un algorithme permettant de calculer n'importe quelle décimale de ce nombre. Par exemple, π est un nombre calculable : on peut écrire un programme `pi`, tel que `pi(`n`)` renvoie la $n^{\text{ème}}$ décimale de π.