M2 “Probabilités et Modèles Aléatoires” Paris VI *Année 2015 – 2016*
“Calcul stochastique et processus de diffusion” (L. Zambotti)

Chapitre VII. Équations différentielles stochastiques

Exercice 1. Considérons l'EDS $E_x(\sigma,\, b)$ en dimension 1.

(i) Soit $s:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $\frac{1}{2}s''\sigma^2+s'\,b=0$. Montrer que $(s(X_t),\, t\geq 0)$ est une martingale locale continue. La fonction s est appelée une **fonction d'échelle** de X.

(ii) On suppose que σ est continue et que s' et σ ne s'annulent pas. Soient $a<x<b$ des réels, et soit $T_{a,b}:=\inf\{t\geq 0:\ X_t\notin\,]a,\, b[\,\}$ (avec $\inf\varnothing:=\infty$).

Montrer que $T_{a,b}<\infty$ $\mathbb{P}^x$-p.s., et que $\mathbb{P}^x\{X_{T_{a,b}}=a\}=\frac{s(b)-s(x)}{s(b)-s(a)}$, $\mathbb{P}^x\{X_{T_{a,b}}=b\}=\frac{s(x)-s(a)}{s(b)-s(a)}$.

Exercice 2. (i) Soit $X:=(X_t,\, t\geq 0)$ solution de $E(\sigma,\, b)$ à valeurs dans un ouvert $D\subset\mathbb{R}^d$. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$ un réel. Soit $f:D\subset\mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $\mathscr{L}f=\lambda f$, où $(\mathscr{L}f)(x):=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^d\sum_{j=1}^d(\sigma\sigma^*)_{ij}(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x)+\sum_{i=1}^d b_i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$. Montrer que $(f(X_t)\mathrm{e}^{-\lambda t},\, t\geq 0)$ est une martingale locale continue.

(ii) Soit $B:=(B^1,\, B^2,\, B^3)$ un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, issu de $B_0:=a\in\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$. Soit $X:=|B|^2$, où $|B|$ désigne la norme euclidienne de B. Montrer que X est solution d'une EDS $E(\sigma,\, b)$ dont on précisera les coefficients σ et b.

(iii) On suppose désormais $\lambda\geq 0$. Montrer que $2tf''(t)+3f'(t)=\lambda f(t)$, $t>0$, pour $f(t)=\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{2\lambda t}}}{\sqrt{2\lambda t}}$ ou $f(t):=\frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{2\lambda t}}}{\sqrt{2\lambda t}}$.

(iv) Soit $x>|a|^2$, et soit $T_x:=\inf\{t\geq 0:\ X_t=x\}$. Montrer que pour tout $\lambda\geq 0$, on a $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{-\lambda T_x})=\frac{\mathrm{sh}(\sqrt{2\lambda|a|^2})}{\sqrt{2\lambda|a|^2}}\frac{\sqrt{2\lambda x}}{\mathrm{sh}(\sqrt{2\lambda x})}$.

(v) On suppose maintenant $B_0=0\in\mathbb{R}^3$. Calculer $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{-\lambda T_x})$, $\lambda\geq 0$.

Exercice 3. Soient $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t),\mathbb{P},B)$ un $(\mathscr{F}_t)$-mouvement brownien (réel issu de 0) et σ et b des fonctions boréliennes sur $\mathbb{R}$ telles que pour tous $x,y\in\mathbb{R}$,

$$|\sigma(x)|\leq M,\ |b(x)|\leq M,\ |\sigma(x)-\sigma(y)|\leq K|x-y|,\ |b(x)-b(y)|\leq K|x-y|.$$

Soit, x étant fixé, X la solution de l'EDS $X_t=x+\int_0^t\sigma(X_s)\,\mathrm{d}B_s+\int_0^t b(X_s)\,\mathrm{d}s$.

On considère le processus X^n défini pour $n\geq 1$ par :

$$X_0^n=x,\ X_t^n=X_{k/n}^n+\sigma(X_{k/n}^n)(B_t-B_{k/n})+b(X_{k/n}^n)(t-\frac{k}{n}),\qquad \frac{k}{n}\leq t\leq\frac{k+1}{n},\ \ k=0,1,\cdots$$

On pose $\tau_s^n:=\sum_{k=0}^\infty\frac{k}{n}\mathbf{1}_{[\frac{k}{n},\,\frac{k+1}{n}[}(s)$.

(i) Montrer que $X_t^n=x+\int_0^t\sigma(X_{\tau_s^n}^n)\,\mathrm{d}B_s+\int_0^t b(X_{\tau_s^n}^n)\,\mathrm{d}s$.

(ii) Montrer qu'il existe une constante A telle que $\mathbb{E}\{(X_t^n-X_{\tau_t^n}^n)^2\}\leq\frac{A}{n}$, $\forall t\in[0,1]$, $\forall n\geq 1$.

(iii) Montrer qu'il existe des constantes C_1 et C_2 telles que $\mathbb{E}\{(X_t-X_t^n)^2\}\leq C_1\int_0^t\mathbb{E}\{(X_s-X_s^n)^2\}\,\mathrm{d}s+\frac{C_2}{n}$, $\forall t\in[0,1]$, $\forall n\geq 1$.

En déduire qu'il existe une constante C_3 telle que $\sup_{t\in[0,1]}\mathbb{E}\{(X_t-X_t^n)^2\}\leq\frac{C_3}{n}$, $\forall n\geq 1$.

(iv) Montrer qu'il existe une constante C_4 telle que pour toute fonction f à dérivées continues bornées, $|\mathbb{E}\{f(X_1^n)-f(X_1)\}|\leq\|f'\|_\infty\frac{C_4}{\sqrt{n}}$, $\forall n\geq 1$.

Exercice 4. On s'intéresse à l'EDS $E(\sigma, b)$ avec $\sigma(t,x) := |x|^\alpha \wedge 1$ et $b(t,x) := 0$, où $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$ est une constante fixée.

(i) Soit $Y_t := \int_0^t \frac{\mathbf{1}_{\{B_s \neq 0\}}}{|B_s|^{2\alpha} \wedge 1} \, \mathrm{d}s$. Montrer que p.s., $Y_t < \infty$, $\forall t \geq 0$.

(ii) Montrer que'il n'y a pas d'unicité faible.

(iii) Montrer qu'il y a unicité trajectorielle si $\alpha \geq 1$.

Exercice 5. Soit B un $(\mathscr{F}_t)$-mouvement brownien standard.

(i) Montrer qu'il existe un processus X continu adapté tel que

$$X_t = 1 + \int_0^t \frac{1}{(1+s)(1+|X_s|)} \, \mathrm{d}B_s - \frac{1}{2} \int_0^t X_s \, \mathrm{d}s, \qquad t \geq 0.$$

(ii) Montrer que X est adapté par rapport à la filtration canonique de B.

(iii) Soit $X_t^* := \sup_{s \in [0,t]} |X_s|$. Montrer que $\mathbb{E}[\,(X_1^*)^2\,] < \infty$. En considérant $X_t - X_1$, montrer que $\mathbb{E}[\,(X_2^*)^2\,] < \infty$. Montrer que $\mathbb{E}[\,(X_t^*)^2\,] < \infty$ pour tout $t \geq 0$.

(iv) Soit $Y_t := \mathrm{e}^{1/(1+t)}(1 + X_t^2)$, $t \geq 0$. Montrer que Y est une surmartingale (par rapport à la filtration $(\mathscr{F}_t)$).

(v) Montrer que $\lim_{t \to \infty} |X_t|$ existe p.s.

(vi) En considérant la partie à variation finie de Y, montrer que $\int_0^\infty X_s^2 \, \mathrm{d}s < \infty$, p.s.

(vii) Montrer que $\liminf_{t \to \infty} |X_t| = 0$ p.s. En déduire que $\lim_{t \to \infty} X_t = 0$ p.s.

Exercice 6. Soit B un $(\mathscr{F}_t)$-mouvement brownien standard. Soit $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne. Fixons $x \in \mathbb{R}$ et $0 < \varepsilon \leq 1$.

Soit $X^{x,\varepsilon} := (X_t^{x,\varepsilon},\ t \geq 0)$ solution de l'EDS $X_t^{x,\varepsilon} = x + \varepsilon B_t + \int_0^t b(X_s^{x,\varepsilon}) \, \mathrm{d}s$. Soit $y^x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que $y^x(t) = x + \int_0^t b(y^x(s)) \, \mathrm{d}s$, $t \geq 0$.

Montrer que pour tout $\delta > 0$, il existe $c_1 \in \mathbb{R}_+^*$ et $c_2 \in \mathbb{R}_+^*$, dont les valeurs ne dépendent pas de (x, ε), telles que $\mathbb{P}\{\sup_{t \in [0,1]} |X_t^{x,\varepsilon} - y^x(t)| > \delta\} \leq c_1 \exp(-\frac{c_2}{\varepsilon^2})$.

Exercice 7. Soit $(X_t,\ t \geq 0)$ un processus continu et adapté, à valeurs dans $]0, 1]$, tel que

$$X_t = \frac{1}{\sqrt{2}} + \int_0^t X_s(1 - X_s^2) \, \mathrm{d}B_s - \frac{1}{2} \int_0^t X_s(1 - X_s^2)(1 + 3X_s^2) \, \mathrm{d}s.$$

(i) Soit $\gamma \in]0, 1[$ un réel, et soit $\tau := \inf\{t \geq 0 :\ X_t \geq \gamma\}$ ($\inf \varnothing := \infty$). On considère le processus $U_t := \frac{X_{t\wedge\tau}^2}{1 - X_{t\wedge\tau}^2}$, $t \geq 0$, qui est bien défini.

Montrer que $(U_t,\ t \geq 0)$ est une semimartingale, et écrire sa décomposition canonique.

(ii) Montrer que $\mathbb{E}(U_t) = 1$ pour tout $t \geq 0$.

(iii) Montrer que $\mathbb{P}(\tau < \infty) \leq \frac{1-\gamma^2}{\gamma^2}$.

(iv) Montrer que presque sûrement, $X_t < 1$ pour tout $t \geq 0$. En particulier, on peut p.s. définir le processus $V_t := \frac{X_t^2}{1 - X_t^2}$, $t \geq 0$.

(v) Montrer que $(V_t,\ t \geq 0)$ est solution d'une équation différentielle stochastique dont on précisera les coefficients.

(vi) Écrire $(X_t,\ t \geq 0)$ en fonctions de $(B_t,\ t \geq 0)$.