M2 "Probabilités et Finance" Sorbonne Université *Année 2021 – 2022*
"Introduction aux processus de diffusion" (L.Zambotti)

Chapitre II. Mouvement brownien et propriété de Markov

Dans tous les exercices, $B = (B_t,\ t \geq 0)$ est un mouvement brownien.

Exercice 1 On définit $d_1 := \inf\{t \geq 1 :\ B_t = 0\}$ et $g_1 := \sup\{t \leq 1 :\ B_t = 0\}$.

(i) Les variables aléatoires d_1 et g_1 sont-elles des temps d'arrêt ?

(ii) Calculer la loi de d_1 et celle de g_1 (indication : utiliser la propriété de Markov au temps 1 et une formule obtenue dans le cours pour la loi de τ_x, $x \in \mathbb{R}$).

Exercice 2 On pose $\tau_1 := \inf\{t > 0 :\ B_t = 1\}$ et $\tau := \inf\{t \geq \tau_1 :\ B_t = 0\}$.

(i) La variable aléatoire τ est-elle un temps d'arrêt ?

(ii) Calculer la loi de τ.

Exercice 3 (i) Étudier la convergence en probabilité de $\frac{\log(1+B_t^2)}{\log t}$ (quand $t \to \infty$).

(ii) Étudier la convergence p.s. de $\frac{\log(1+B_t^2)}{\log t}$.

Exercice 4 (i) Soient $[a, b]$ et $[c, d]$ deux intervalles disjoints de $\mathbb{R}_+$. Montrer que presque sûrement, $\sup_{t\in[a,b]} B_s \neq \sup_{t\in[c,d]} B_s$.

(ii) En déduire que p.s., chaque maximum local de B est un maximum local au sens strict.

Exercice 5 En utilisant la propriété de scaling, montrer que $(\int_0^t \mathrm{e}^{B_s}\,\mathrm{d}s)^{1/t^{1/2}} \to \mathrm{e}^{|N|}$ en loi lorsque $t \to \infty$, où N suit la loi gaussienne $\mathscr{N}(0,\,1)$.

Exercice 6 (i) Soit $a > 0$ et soit $\tau_a := \inf\{t \geq 0 :\ B_t = a\}$. Rappelons que $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-\lambda\,\tau_a}] = \mathrm{e}^{-a\sqrt{2\lambda}}$, $\forall\lambda \geq 0$. Montrer que $\mathbb{P}(\tau_a \leq t) \leq \exp(-\frac{a^2}{2t})$, pour tout $t > 0$.

(ii) Montrer que si ξ est une variable aléatoire suivant la loi gaussienne $\mathscr{N}(0,\,1)$, alors $\mathbb{P}(\xi \geq x) \leq \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2/2}$, $\forall x > 0$ (à comparer avec l'exercice 1 de la feuille n. 0).

Exercice 7 Soit $S_t := \sup_{s\in[0,t]} B_s$, $t \geq 0$. Montrer que $S_2 - S_1$ a la même loi que $\max\{|N| - |\widetilde{N}|,\, 0\}$, où N et $\widetilde{N}$ désignent deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi gaussienne $\mathscr{N}(0,\,1)$.

Exercice 8 Montrer, sans utiliser la propriété d'inversion du temps, mais avec la loi des grands nombres et le principe de réflexion, que $\frac{B_t}{t} \to 0$ p.s. lorsque $t \to \infty$.

Exercice 9 Le but de cet exercice est de prouver que $\tau < \infty$ p.s., où $\tau := \inf\{t \ge 0 : B_t = \sqrt{1+t}\}$ ($\inf \varnothing := \infty$).

Pierre dit : Puisque τ est $\mathscr{F}_{0+}$-mesurable, on sait d'après la loi 0–1 de Blumenthal que $\mathbb{P}\{\tau < \infty\}$ est 0 ou 1. Or, $\mathbb{P}\{\tau < \infty\} \ge \mathbb{P}\{B_1 \ge \sqrt{2}\,\} > 0$, on a $\tau < \infty$ p.s.

Que pensez-vous de l'argument de Pierre ?

Exercice 10 Montrer que p.s. $\int_0^\infty \sin^2(B_t)\,\mathrm{d}t = \infty$.

Exercice 11 (i) Montrer que pour tout $t > 0$ et tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}\{\sup_{s\in[0,\,t]} |B_s| \le \varepsilon\} > 0$.

(ii) Montrer qu'il existe $c \in]0, \infty[$ tel que $\mathbb{P}\{\sup_{s\in[0,\,1]} |B_s| \le \varepsilon\} \ge \mathrm{e}^{-c/\varepsilon^2}$, $\forall \varepsilon \in]0, 1]$.

(iii) Montrer que pour tout $t > 0$ et tout $x > 0$, $\mathbb{P}\{\sup_{s\in[0,\,t]} |B_s| \ge x\} > 0$.

Exercice 12 (loi du logarithme itéré) On pose $S_t := \sup_{s\in[0,t]} B_s$, $h(t) := \sqrt{2t \log\log t}$.

(i) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que la série numérique $\sum_n \mathbb{P}\{S_{t_{n+1}} \ge (1+\varepsilon)h(t_n)\}$ est convergente, où $t_n = (1+\varepsilon)^n$. En déduire que $\limsup_{t\to\infty} \frac{S_t}{h(t)} \le 1$, p.s.

(ii) Montrer que

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\sup_{s\in[0,t]} |B_s|}{h(t)} \le 1, \qquad \text{p.s.}$$

(iii) Soit $\theta > 1$, et soit $s_n = \theta^n$. Montrer que pour tout $\alpha \in]0, \sqrt{1-\theta^{-1}}\,[$, la série numérique $\sum_n \mathbb{P}\{B_{s_n} - B_{s_{n-1}} > \alpha\, h(s_n)\}$ est divergente. En déduire que $\limsup_{t\to\infty} \frac{B_t}{h(t)} \ge \alpha - \frac{2}{\sqrt{\theta}}$, p.s.

(iv) Montrer que

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{B_t}{h(t)} = 1, \qquad \text{p.s.}$$

(v) Soient $X_1(t) := |B_t|$, $X_2(t) := S_t$, et $X_3(t) := \sup_{s\in[0,t]} |B_s|$. Que peut-on dire de $\limsup_{t\to\infty} \frac{X_i(t)}{h(t)}$ pour $i = 1$, 2, ou 3 ?

(vi) Que peut-on dire de $\liminf_{t\to\infty} \frac{B_t}{h(t)}$? Et de $\limsup_{t\to 0} \frac{B_t}{\sqrt{2t\log\log(1/t)}}$?