

Chapitre I. Construction du mouvement brownien

Exercice 1 Soit $(\xi_{k,n}, k \geq 0, n \geq 0)$ une famille de variables aléatoires i.i.d. suivant toutes la loi gaussienne $\mathcal{N}(0, 1)$. On définit pour tout $n \geq 0$, le processus $(X_n(t), t \in [0, 1])$ tel que $t \mapsto X_n(t)$ est linéaire sur chacun des intervalles $[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}]$, $0 \leq i \leq 2^n - 1$, de la façon suivante : $X_0(0) := 0, X_0(1) := \xi_{0,0}$, et par récurrence, pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} X_n\left(\frac{2i}{2^n}\right) &:= X_{n-1}\left(\frac{2i}{2^n}\right), & 0 \leq i \leq 2^{n-1}, \\ X_n\left(\frac{2j+1}{2^n}\right) &:= X_{n-1}\left(\frac{2j+1}{2^n}\right) + \frac{\xi_{2j+1,n}}{2^{(n+1)/2}}, & 0 \leq j \leq 2^{n-1} - 1. \end{aligned}$$

Montrer que pour tout $n \geq 0$, $(X_n(\frac{k}{2^n}), 0 \leq k \leq 2^n)$ est un vecteur gaussien centré tel que $\mathbb{E}[X_n(\frac{k}{2^n})X_n(\frac{\ell}{2^n})] = \frac{k}{2^n} \wedge \frac{\ell}{2^n}$, pour $0 \leq k, \ell \leq 2^n$.

Exercice 2 Soit $(B_t^m, t \in [0, 1])$, pour $m \geq 0$, une suite de mouvements browniens indépendants définis sur $[0, 1]$. On pose

$$B_t := B_{t-\lfloor t \rfloor}^{\lfloor t \rfloor} + \sum_{0 \leq m < \lfloor t \rfloor} B_1^m, \quad t \geq 0.$$

Montrer que $(B_t, t \geq 0)$ est un mouvement brownien.

Dans les exercices suivants, $(B_t, t \geq 0)$ est un mouvement brownien.

Exercice 3 Soit $T := \inf\{t \geq 0 : B_t = 1\}$ (avec la convention $\inf \emptyset := \infty$). Montrer que $\mathbb{P}(T < \infty) \geq \frac{1}{2}$.

Exercice 4 Soit $\xi := \int_0^1 B_t dt$. Quelle est la loi de ξ ?

Exercice 5 Soit $\eta := \int_0^2 B_t dt$. Calculer l’espérance conditionnelle $\mathbb{E}(B_1 | \eta)$.

Exercice 6 Montrer que $B_7 - B_2$ est indépendante de $\sigma(B_s, s \in [0, 1])$.

Exercice 7 Soit $\mathcal{F}_1 := \sigma(B_s, s \in [0, 1])$. Calculer les espérances conditionnelles $\mathbb{E}(B_5 | \mathcal{F}_1)$ et $\mathbb{E}(B_5^2 | \mathcal{F}_1)$.

1. Plus tard, on verra que $T < \infty$ p.s.

Exercice 8 (i) Montrer que pour tout $t > 0$, $\int_0^t B_s^2 ds$ a la même loi que $t^2 \int_0^1 B_s^2 ds$.

(ii) Montrer que les processus $(\int_0^t B_s^2 ds, t \geq 0)$ et $(t^2 \int_0^1 B_s^2 ds, t \geq 0)$ n'ont pas la même loi.

Exercice 9 Soit T une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1, indépendante de B . Quelle est la loi de B_T ?

Exercice 10 Montrer que $\int_0^1 \frac{B_s}{s} ds$ est bien définie p.s.

Exercice 11 Soit $\beta_t := B_t - \int_0^t \frac{B_s}{s} ds$. Montrer que $(\beta_t, t \geq 0)$ est un mouvement brownien.

Exercice 12 Montrer que $\int_0^\infty |B_s| ds = \infty$ p.s.

Exercice 13 Soit $B := (B_t, t \in [0, 1])$ un mouvement brownien standard indexé par $[0, 1]$. Pour tout $t \in [0, 1]$, on pose

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_t &:= \sigma(B_s, s \in [0, t]), \\ \mathcal{G}_t &:= \mathcal{F}_t \vee \sigma(B_1) = \sigma(\{C; C \in \mathcal{F}_t \text{ ou } C \in \sigma(B_1)\}).\end{aligned}$$

(i) Soient $0 \leq s < t \leq 1$. Montrer que

$$\mathbb{E}[(B_t - B_s) | \mathcal{G}_s] = \frac{t-s}{1-s} (B_1 - B_s).$$

(ii) Considérons le processus $\beta := (\beta_t, t \in [0, 1])$ défini par

$$\beta_t := B_t - \int_0^t \frac{B_1 - B_s}{1-s} ds, \quad t \in [0, 1].$$

Montrer que pour $0 \leq s < t \leq 1$, $\mathbb{E}(\beta_t | \mathcal{G}_s) = \beta_s$ p.s.

(iii) Montrer que

$$\beta_t = B_t - tB_1 + \int_0^t \frac{B_s - sB_1}{1-s} ds, \quad t \in [0, 1].$$

(iv) Montrer que $(B_t - tB_1)_{t \in [0,1]}$ et $(\beta_t)_{t \in [0,1]}$ sont indépendants de B_1 .

(v) Montrer que $(\beta_t)_{t \in [0,1]}$ est un mouvement brownien. En déduire que le pont brownien défini par $b_t := B_t - tB_1, t \in [0, 1]$, satisfait

$$b_t = - \int_0^t \frac{b_s}{1-s} ds + \beta_t, \quad t \in [0, 1].$$