Université Paris Diderot - Paris 7
L1 Sciences Exactes

MT1 MM1, Section C
Partiel du 20 octobre 2012 - 3 heures
(Cours C. Chalons)

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés. Les téléphones mobiles doivent être éteints et rangés. La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation.

Exercice 1
Soient les assertions suivantes :
a) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y > x^2$.
b) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y > x^2$.
c) $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y < x^2$.
d) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y^2 > x$.
e) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, e^x > -y^2$.
f) $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, e^x > -y^2$.
1) Sont-elles vraies ou fausses ?
2) Donner leur négation.

Exercice 2
Soit f une application de E dans F. Soient A et B deux parties de E.
1) Montrer que $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$.
2) Montrer que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
3) Quelle inclusion existe-t-il entre $f(A \cap B)$ et $f(A) \cap f(B)$?
4) A quelle condition l'égalité $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ est-elle vraie ?

Exercice 3
Soit E l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$ (ensemble des entiers naturels). On définit la fonction $f : E \to \mathbb{N}$ par $f(\emptyset) = 0$ et $f(A) = \sum_{x \in A} x$.
1) Soit $A_n = \{0, 1, 2, 3.., n\}$. Montrer par récurrence que $f(A_n) = \frac{n(n+1)}{2}$.
2) Montrer que f est surjective.
3) Montrer que f n'est pas injective.
4) Donner le cardinal de l'ensemble $f^{-1}(\{3\})$.

Exercice 4
Soient u et v deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$u(t) = \sqrt{5}\, t \quad \text{et} \quad v(t) = t^2 + 3.$$

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ telle que $f(t) = (u(t), v(t))$.
Soit G l'application de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $G(x, y) = x^2 + 2y^2$.
a) Définir l'application $h = G \circ f$.
b) Déterminer $h^{-1}(\{0\})$, $h^{-1}(\mathbb{R}^-)$, $h^{-1}(\mathbb{R}^+)$, $h^{-1}(\{60\})$.
c) Déterminer $h(-1)$, $h(0)$, $h(1)$, $h(\mathbb{R})$.
d) h est-elle injective, surjective ?
e) Montrer que h est une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[18, +\infty[$.

Exercice 5
Soient $E = \{a, b, c\}$ et $F = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon\}$. On suppose que les nombres a, b, c d'une part et $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ sont distincts.
1) Combien existe-t-il d'applications de E dans F?
2) Combien existe-t-il d'injections, de surjections et de bijections de E dans F?

Exercice 6
Donner la partie réelle et la partie imaginaire de

$$\frac{(1-i)^2 \exp(\frac{\pi}{4} i)}{(1+i)}.$$

Exercice 7
1) Déterminer les modules et les arguments des nombres complexes suivants :
   i) $z_1 = \sqrt{3} - i$,
   ii) $z_2 = 1 - i$,
   iii) $z = \dfrac{z_1}{z_2}$.
2) En déduire $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

Exercice 8
Déterminer les solutions complexes (sous forme exponentielle ou algébrique) des équations suivantes :
i) $z^4 - 1 = 0$,
ii) $z^3 = 1 + i$,
iii) $z^2 - 2iz - i\sqrt{3} = 0$.