# Le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels.

## Section I : $\mathbb{R}$ est un corps commutatif totalement ordonné

Thierry Meyre

Université de Paris– Institut de Recherche en Enseignement des Mathématiques

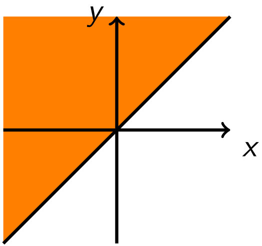
Mai 2020

# I.2. Relation d'ordre

## Définition

Soit $E$ un ensemble. Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E est définie par un sous-ensemble $G$ de $E \times E$. On note $x\mathcal{R}y$ si $(x, y) \in G$.
On dit que $G \subseteq E \times E$ est le *graphe* de la relation $\mathcal{R}$.

**Exemple 1 :** La relation $\leq$ sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est définie par le graphe suivant.



# I.2. Relation d'ordre

## Définition

On dit qu'une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E est une *relation d'ordre* si elle satisfait les trois conditions suivantes.

- Réflexivité : $\forall x \in E,\ x\mathcal{R}x$.
- Transitivité : $\forall (x, y, z) \in E^3,\ [\,x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z\,] \ \Rightarrow\ x\mathcal{R}z$.
- Antisymétrie : $\forall (x, y) \in E^2,\ [\,x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x\,] \ \Rightarrow\ x = y$.

**Exemple :** La relation $\leq$ sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est une relation d'ordre. De même pour la relation $\geq$ sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 7 :** Soit $E$ un ensemble,et soit $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de $E$. Vérifier que l'inclusion est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(E)$.
On rappelle que $A \subseteq B$ signifie que $\forall x \in E,\ [x \in A \Rightarrow x \in B]$.

# I.2. Relation d'ordre

## Définition

On dit qu'une relation d'ordre $\mathcal{R}$ sur E est *totale* si :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad x\mathcal{R}y \text{ ou } y\mathcal{R}x.$$

**Exemple :** La relation d'ordre $\leq$ sur $\mathbb{R}$ est totale puisque :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \leq y \text{ ou } y \leq x.$$

On dit que $(\mathbb{R}, \leq)$ est un ensemble *totalement ordonné*.
De même pour $(\mathbb{R}, \geq)$.

**Exercice 8 :** Soit $E$ un ensemble ni vide ni réduit à un singleton.
Montrer que l'inclusion n'est pas une relation d'ordre totale sur $\mathcal{P}(E)$.

# I.2. Relation d'ordre

## Définition

Soit $(\mathbb{K}, +, \times)$ un corps commutatif tel que l'ensemble $\mathbb{K}$ est muni d'une relation d'ordre totale $\mathcal{R}$. On dit que $(\mathbb{K}, +, \times, \mathcal{R})$ est un *corps commutatif totalement ordonné* (CCTO) s'il satisfait en outre :

- La relation d'ordre $\mathcal{R}$ est compatible avec l'addition :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{K}^3, \quad x\mathcal{R}y \ \Rightarrow \ (x+z)\ \mathcal{R}\ (y+z)$$

- Le sous-ensemble $\{x \in \mathbb{K},\ 0\mathcal{R}x\}$ est stable par $\times$ :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{K}^2, \quad 0\mathcal{R}x \text{ et } 0\mathcal{R}y \ \Rightarrow \ 0\ \mathcal{R}\ (x \times y).$$

**Exemple :** $(\mathbb{R}, +, \times, \leq)$ est un CCTO

**Contre-exemple :** $(\mathbb{R}, +, \times, \geq)$ n'est pas un CCTO car $\{x \in \mathbb{R}, 0 \geq x\}$ n'est pas stable par la multiplication.

# I.2. Relation d'ordre

**Remarque.** Dans le cas d'un corps commutatif totalement ordonné, on note souvent la relation d'ordre $\leq$ plutôt que $\mathcal{R}$. On introduit alors la notation $\geq$ que l'on définit par l'équivalence suivante :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{K}^2, \quad x \geq y \ \Leftrightarrow \ y \leq x.$$

**Exercice 9 (« règle de signes ») :** Soit $(\mathbb{K}, +, \times, \leq)$ un CCTO. Prouver que l'on a les propriétés suivantes, pour tout $(x, y) \in \mathbb{K}^2$.
**a)** $x \geq 0 \ \Rightarrow \ -x \leq 0$.
**b)** $x \leq 0$ et $y \leq 0 \ \Rightarrow \ x \times y \geq 0$.
**c)** $x \leq 0$ et $y \geq 0 \ \Rightarrow \ x \times y \leq 0$.
**d)** $x^2 := x \times x \geq 0$.
**e)** $1 \geq 0$.

**Exercice 10 :** Donner deux exemples de CCTO différents de $(\mathbb{R}, +, \times, \leq)$.