1 5) $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$

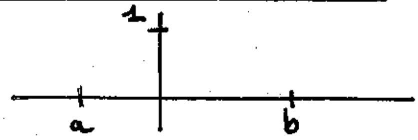
6) $\forall n \in \mathbb{N} \quad \{T = n\} = \{X \in [n, n+1[\} \in \mathcal{F}$ donc T variable aléatoire

2 $P(T=n) = \int_n^{n+1} \lambda e^{-\lambda x} dx = [-e^{-\lambda x}]_n^{n+1} = e^{-\lambda n}(1 - e^{-\lambda})$ donc

T suit la loi géométrique de paramètre $1 - e^{-\lambda} \in]0,1[$

V Simulation d'une v.a.

1 1)



1 2) $\forall x < 0 \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f = 0 \qquad \forall x \geq 0 \quad F(x) = \int_{-\infty}^0 f + \int_0^x f = \int_0^x f$

3) D'après 2), $F|_{\mathbb{R}_+}$ est continue (C^1 même !) et strictement croissante

2 donc bijective sur $F(\mathbb{R}_+)$. Or $F(0) = 0$, et $F(+\infty) = 1$ en tant que f d.

Comme la croissance de $F|_{\mathbb{R}_+}$ est stricte, on en déduit $F(\mathbb{R}_+) = [0, 1[$

1 4) $P(X \in [0,1[) = \int_{[0,1[} \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\, dx = \int_0^1 1\, dx = 1$

5) Puisque $F^{-1} : [0,1[\to \mathbb{R}_+$, $Y = F^{-1}(X)$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et donc

$\forall x < 0 \quad F_Y(x) = P(Y \leq x) = 0$

2 $\forall x \geq 0 \quad F_Y(x) = P(F^{-1}(X) \leq x) = P(X \leq \underbrace{F(x)}_{\in [0,1[}) = F(x)$ d'après 4)

Finalement, $\forall x \in \mathbb{R} \quad F_Y(x) = F(x)$ en utilisant 2)

1 6) La f.r. caractérisant la loi, $F_Y = F$ implique $P_Y = P_f$, où P_f est la loi de densité f sur $\mathbb{R}$

7) $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)$ donne $F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x}$ pour tt $x \geq 0$

2 Calculons F^{-1}. Pour tout $y \in [0,1[$, $F(x) = y \iff e^{-\lambda x} = 1 - y \iff x = -\frac{\ln(1-y)}{\lambda}$

donc $F^{-1}(y) = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-y)$ et l'on prend $Y = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-X)$

8) $f_\alpha \in C_M(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ est évident et ns avons :

1 $\int_{\mathbb{R}} f_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{x}{\alpha^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\alpha^2}\right) dx = \left[-\exp\left(-\frac{x^2}{2\alpha^2}\right)\right]_0^{+\infty} = 1$

9) $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad F(x) = \int_0^x f_\alpha(t)\, dt = \left[-\exp\left(-\frac{t^2}{2\alpha^2}\right)\right]_0^x = 1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2\alpha^2}\right)$

2 Pour tout $y \in [0,1[$, $F(x) = y \iff \exp\left(-\frac{x^2}{2\alpha^2}\right) = 1 - y \iff \frac{x^2}{2\alpha^2} = -\ln(1-y)$

$\iff x = \alpha\sqrt{-2\ln(1-y)}$

donc on prend $Z = \alpha\sqrt{-2\ln(1-X)}$