I Tram

1 $T \sim \mathcal{E}(\lambda) \Rightarrow E[T] = 1/\lambda = 9$ d'où $\lambda = 1/9$

II Filtre anti-spam

$I = \{$le courrier est indésirable$\}$ $\quad V = \{$le courrier contient « viagra »$\}$

2 $P(I) = 0{,}3 \quad P(V|I) = 0{,}8 \quad P(V|I^c) = 0{,}01$

Bayes $P(I|V) = \dfrac{P(V|I)P(I)}{P(V|I)P(I) + P(V|I^c)P(I^c)} = \dfrac{0{,}8 \times 0{,}3}{0{,}8 \times 0{,}3 + 0{,}01 \times 0{,}7} = \dfrac{240}{247}$

III Loi normale

1 1) $Y = m + \sigma X$

2) En posant $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2})$, qui est paire :

1 $P(|X| \geq x) = P(X \in]-\infty, -x]) + P(X \in [x, +\infty[)$ $\quad$ pas de souci en $x=0$ car $P(X=0)=0$

$$= \int_{-\infty}^{-x} g + \int_x^{+\infty} g = 2\int_x^{+\infty} g = 2(1 - G(x))$$

3) Le diamètre est $Y \sim \mathcal{N}(8 ; 0{,}01)$. Or $8 + 0{,}1X \sim \mathcal{N}(8 ; 0{,}01)$ donc

1 $P(|Y-8| \geq 0{,}2) = P(|X| \geq 2) = 2(1 - G(2)) = 2 \times 0{,}0228 = 0{,}0456$

IV Taux de panne

1 1) $\{T = n\} = \{T \geq n\} - \{T \geq n+1\}$ différence propre

2) Notons que $\theta_k = \dfrac{P(\{T=k\} \cap \{T \geq k\})}{P(T \geq k)} = \dfrac{P(T=k)}{P(T \geq k)}$ et que

$P(T \geq n+1 \mid T \geq n) = \dfrac{P(\{T \geq n+1\} \cap \{T \geq n\})}{P(T \geq n)} = \dfrac{P(T \geq n+1)}{P(T \geq n)}$

2 En divisant l'égalité du 1) par $P(T \geq n) > 0$, on en déduit :

$$\theta_n = 1 - P(T \geq n+1 \mid T \geq n)$$

Comme $P(T \geq n+1) > 0$, on a $P(T \geq n+1 \mid T \geq n) > 0$ d'où $\theta_n < 1$.

Or $\theta_n \in [0,1]$ en tant que proba. conditionnelle, d'où la conclusion.

3) $\theta_0 = P(T = 0 \mid T \geq 0) = P(T = 0 \mid \Omega) = P(T=0)$ donc $P(T=0) = \theta_0$

$$P(T \geq n) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{P(T \geq k+1)}{P(T \geq k)} = \prod_{k=0}^{n-1} P(T \geq k+1 \mid T \geq k) = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \theta_k)$$

2 En utilisant 1), on en déduit :

$P(T=n) = \prod_{k=0}^{n-1} (1-\theta_k) - \prod_{k=0}^{n} (1-\theta_k) = \theta_n \prod_{k=0}^{n-1} (1-\theta_k)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

4) $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(T=n) = a(1-a)^n$

1 T suit la loi géométrique de paramètre a