AGREG INTERNE 2010, 2e épreuve : CORRIGÉ

PARIS DIDEROT université PARIS 7

I

1) (a) Supposons $d^\circ P = p \in \mathbb{N}^*$, $P(z) = \sum_{i=0}^{p} a_i z^i$ avec $a_p \neq 0$.
Nous calculons alors :

$$\Delta P(z) = P(z+1) - P(z) = \sum_{i=0}^{p} a_i [(z+1)^i - z^i] = \sum_{i=0}^{p} a_i \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i}{j} z^j$$

Nous en déduisons $d^\circ \Delta P \leq p-1$ et même $d^\circ \Delta P = p-1$ puisque le coefficient de z^{p-1} dans ΔP est $a_p \binom{p}{p-1} = p a_p \neq 0$.
Si $d^\circ P = 0$, alors $P = a_0$ et $\Delta P = 0$.
Une récurrence immédiate nous donne alors :

$$d^\circ P = p \Rightarrow \Delta^{p+1} P = 0$$, d'où la nilpotence locale de Δ.

(b) Soit $p \in \mathbb{N}$ fixé. D'après la question précédente, si $d^\circ P = q > p$, alors : $d^\circ(\Delta^p P) = q - p > 0$ d'où $\Delta^p P \neq 0$.
Ceci prouve que Δ n'est pas nilpotent.

2) Nous allons montrer que $\operatorname{Ker} \Delta$ est la droite vectorielle constituée par les polynômes constants. En part., $\operatorname{Ker}\Delta \neq \{0\}$ donc Δ non injectif.
Si $P = c \in \mathbb{C}$, alors $\Delta P = 0$.
Réciproquement, si $\Delta P = 0$, une récurrence immédiate nous donne :
$\forall z \in \mathbb{C} \ \forall n \in \mathbb{N} \quad P(z+n) = P(z)$
On en déduit que le polynôme $Q(z) := P(z) - P(0)$ admet une infinité de racines – tous les entiers – donc est nul. Ainsi $P(z) = P(0)$.

3) (a) Puisque H_0 est constant, on a $\Delta H_0 = 0$. Pour $n \geq 1$ et $z \in \mathbb{C}$, on a :
$$H_n(z) = \frac{z(z-1)\cdots(z-n+1)}{n!}$$ d'où

$$\Delta H_n(z) = H_n(z+1) - H_n(z) = \frac{(z+1)z\cdots(z-n+2)}{n!} - \frac{z(z-1)\cdots(z-n+2)(z-n+1)}{n!}$$

$$\Delta H_n(z) = \frac{z(z-1)\cdots(z-n+2)}{n!}[(z+1)-(z-n+1)] = \frac{z(z-1)\cdots(z-n+2)}{(n-1)!} = H_{n-1}(z)$$

Si nous posons $H_m(z) = 0$ pour $m \in \mathbb{Z}_-^*$, nous obtenons par récurrence :
$$\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2 \qquad \Delta^k H_n = H_{n-k}$$
Or $H_m(0) = 0$ si $m \in \mathbb{Z}^*$ et $H_0(0) = 1$ d'où $\Delta^k H_n(0) = \delta_{n,k}$

(b) Puisque $d^\circ H_n = n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de polynômes de degrés échelonnés, donc une base de $\mathcal{P}$.
Ainsi, pour tout $P\in\mathcal{P}$, il existe une suite $(a_n)\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ nulle à partir d'un certain rang telle que $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n H_n$.
Puisque cette dernière somme est en réalité finie, nous en déduisons par linéarité : $\forall k\in\mathbb{N}\quad \Delta^k P(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \Delta^k H_n(0) = a_k$
Finalement, nous avons donc bien l'égalité de l'énoncé.

Appliquons cette égalité à $P(z)=z^3$ en calculant $\Delta^k P(0)$, $1\leq k\leq 3$ puisque $d^\circ P = 3 \Rightarrow \Delta^k P = 0$ pour $k\geq 4$.

$\Delta P(z) = (z+1)^3 - z^3 = 3z^2+3z+1$

$\Delta^2 P(z) = 3[(z+1)^2 - z^2] + 3 = 3(2z+1)+3 = 6z+6$, $\Delta^3 P(z) = 6$

Ainsi $P(z) = z^3 = \sum_{n=0}^{3} (\Delta^n P)(0)\, H_n(z) = H_1(z) + 6H_2(z) + 6H_3(z)$

(c) Soit $Q\in\mathcal{P}$, montrons qu'il existe $P\in\mathcal{P}$ tel que $\Delta P = Q$.
D'après (b), il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nulle à partir d'un certain rang telle que $Q = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n H_n$.
Cette dernière somme étant en réalité finie, nous constatons par linéarité et en utilisant $\Delta H_n = H_{n-1}$ si $n\geq 1$ que $P := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n H_{n+1}$ satisfait $\Delta P = Q$.
Ainsi $\Delta : \mathcal{P}\longrightarrow\mathcal{P}$ est un opérateur surjectif mais non injectif, ce qui n'est pas contradictoire puisque $\mathcal{P}$ est de dimension infinie.

4) (a) $\sum_{n=0}^{N} n^p = \sum_{n=0}^{N} [f(n+1) - f(n)] = f(N+1) - f(0) = f(N+1)$

(b) D'après 3)(b) $z^3 = H_1(z) + 6H_2(z) + 6H_3(z)$ donc d'après 3)(c)
$P(z) = c + H_2(z) + 6H_3(z) + 6H_4(z)$ vérifie $\Delta P(z) = z^3$. Il suffit de choisir la valeur de la constante $c\in\mathbb{C}$ pour que $P(0)=0$, ce qui nous donne $c=0$, et nous constatons alors que $f(z) = H_2(z)+6H_3(z)+6H_4(z)$ satisfait les hypothèses du (a) pour $p=3$.
Simplifions l'expression de $f(z)$:

$$f(z) = \frac{z(z-1)}{2} + z(z-1)(z-2) + \frac{z(z-1)(z-2)(z-3)}{4} = \frac{z(z-1)}{4}\,[2+4(z-2)+(z-2)(z-3)]$$

$$f(z) = \frac{z(z-1)}{4}(z^2-z) = \frac{z^2(z-1)^2}{4}$$

Finalement, $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} n^3 = f(N+1) = \frac{N^2(N+1)^2}{4}$

5) (a) Puisque P est une application continue sur $[0,1]$, elle est bornée donc $\|P\| = \sup_{[0,1]} |P|$ est bien définie. Vérifions les 3 axiomes qui définissent une norme :

- Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, l'application $x \mapsto |\lambda| x$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ étant croissante et continue, on a :

$$\|\lambda P\| = \sup_{x\in[0,1]} |\lambda|\,|P(x)| = |\lambda| \sup_{x\in[0,1]} |P(x)| = |\lambda|\,\|P\|$$

- Par inégalité triangulaire, nous avons, pour $(P,Q) \in \mathcal{P}^2$:
$\forall x \in [0,1] \quad |P(x)+Q(x)| \leqslant |P(x)| + |Q(x)| \leqslant \|P\| + \|Q\|$
En passant à la borne supérieure, nous obtenons : $\|P+Q\| \leqslant \|P\| + \|Q\|$

- Si $P=0$, $\|P\|=0$ est évident. Réciproquement, soit $P \in \mathcal{P}$ tel que $\|P\|=0$, i.e. $\sup_{x\in[0,1]} |P(x)| = 0$. Ceci implique $P(x)=0$ pour tout $x \in [0,1]$. Le polynôme P, admettant une infinité de racines, est nul.
Nous avons donc prouvé : $\|P\|=0 \iff P=0$

(b) Considérons $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}^{\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall z \in \mathbb{C} \quad P_n(z) = z^n$
Nous calculons immédiatement $\|P_n\| = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et
$\Delta P_n(z) = (z+1)^n - z^n$ d'où $\|\Delta P_n\| \geqslant \Delta P_n(1) = 2^n - 1$.
Ainsi $\|\Delta P_n\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et donc l'opérateur Δ, qui n'est pas borné sur la boule unité de $(\mathcal{P}, \|\cdot\|)$, n'est pas continu.

(c) Pour $P \in \mathcal{P}$, nous posons $N(P) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\Delta^n P(0)|$, bien définie puisque la suite $(\Delta^n P(0))_{n\in\mathbb{N}}$ est nulle à partir d'un certain rang d'après 1)(a) donc bornée. Montrons que N est une norme sur $\mathcal{P}$, en procédant d'une façon similaire à (a) :

- $\forall \lambda \in \mathbb{C} \quad N(\lambda P) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\Delta^n(\lambda P)(0)| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\lambda \Delta^n P(0)| = |\lambda|\, N(P)$

- $\forall n \in \mathbb{N} \quad |\Delta^n(P+Q)(0)| = |\Delta^n P(0) + \Delta^n Q(0)| \leqslant |\Delta^n P(0)| + |\Delta^n Q(0)| \leqslant N(P) + N(Q)$
d'où $N(P+Q) \leqslant N(P) + N(Q)$

- Si $P=0$, $N(P)=0$ est évident et réciproquement, en utilisant l'égalité (2) établie dans 3)(b) :
$N(P)=0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \ \Delta^n P(0) = 0 \Rightarrow P=0$

Nous constatons maintenant que Δ est continu sur $(\mathcal{P}, N)$ puisque :
$\forall P \in \mathcal{P} \quad N(\Delta P) = \sup\limits_{m \in \mathbb{N}} |\Delta^{m+1} P(0)| = \sup\limits_{m \in \mathbb{N}^*} |\Delta^m P(0)| \leq N(P)$

Cette inégalité prouve aussi que la norme de l'opérateur continu Δ est ≤ 1.
En fait, elle vaut exactement 1 puisque $N(H_1) = 1$ et $N(\Delta H_1) = N(H_0) = 1$.

6) (a) Soit $x_0 \in \mathring{Y}$ de sorte que $\exists r > 0 \quad B(x_0, r) := \{x \in X, \|x - x_0\| < r\} \subset Y$
$(X, \|\cdot\|)$ Banach
Puisque Y est un s.e.v., on en déduit :
$$-x_0 + B(x_0, r) \subset Y \quad \text{i.e.} \quad B(0, r) \subset Y.$$
Soit $x \in X$. Si $x = 0$, $x \in B(0, r) \subset Y$. Sinon, $\frac{r}{2} \frac{x}{\|x\|} \in B(0, r) \subset Y$
et donc, comme Y s.e.v., $x \in Y$. Finalement, $Y = X$.

(b) Posons $F_n = \operatorname{Ker} T^n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Puisque $T : (X, \|\cdot\|) \to (X, \|\cdot\|)$
est supposée continue, il en est de même de T^n et donc $F_n = (T^n)^{-1}(\{0\})$
est fermé dans $(X, \|\cdot\|)$. L'hypothèse de nilpotence locale de T
nous donne : $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} F_n = X$. Puisque $(X, \|\cdot\|)$ est un Banach, le lemme
de Baire implique : $\exists p \in \mathbb{N} \quad \mathring{F}_p \neq \emptyset$
Or F_p est un s.e.v. de X donc, d'après (a), $F_p = X$, ce qui signifie
$T^p = 0$: l'opérateur T est nilpotent.

7) (a) Si $(\mathcal{P}, N)$ était complet, alors Δ étant continu localement nilpotent
serait nilpotent d'après la question précédente. Or nous avons prouvé
au 1)(b) que Δ n'était pas nilpotent. Donc $(\mathcal{P}, N)$ n'est pas complet.

(b) Supposons l'existence d'une norme N_1 telle que $(\mathcal{P}, N_1)$ soit complet.
Posons $F_n = \operatorname{Vect}(1, z, .., z^n)$, sous-espace des polynômes de degré
inférieur ou égal à n. Puisque (F_n, N_1) est un s.e.v. normé de
dimension finie, il est complet. ainsi F_n est fermé dans $(\mathcal{P}, N_1)$.
On a bien sûr $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} F_n = X$ et donc le lemme de Baire implique :

$$\exists p \in \mathbb{N} \quad \mathring{F}_p \neq \emptyset$$

D'après 6)(a), ceci implique $F_p = \mathcal{P}$, ce qui est absurde puisque
$z^{p+1} \in \mathcal{P} \setminus F_p$.
Nous avons ainsi démontré par l'absurde qu'il n'existe aucune norme
sur $\mathcal{P}$ pour laquelle cet espace est complet.

II

1) (a) La SE qui définit f ayant un rayon de convergence infini, elle converge normalement sur tout compact de $\mathbb{C}$, en particulier sur le cercle $\{|z|=r\}$.

Soit $p\in\mathbb{N}$ fixé. Comme $|e^{-ipt}|=1$ pour tout $t\in[0,2\pi]$, on a donc convergence normale de $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(re^{it})^n e^{-ipt}$ sur $[0,2\pi]$:

$$\sup_{t\in[0,2\pi]} |a_n(re^{it})^n e^{-ipt}| = \sup_{\{z=r\}} |a_n z^n| \leq |a_n| r^n \text{ terme d'une série cvg.}$$

La convergence normale implique la cvg uniforme, ce qui justifie l'interversion intégrale-série :

$$\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-ipt}\,dt = \int_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{int}e^{-ipt}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n \int_0^{2\pi} e^{i(n-p)t}\,dt$$

Or, pour $n\neq p$, $\int_0^{2\pi} e^{i(n-p)t}\,dt = \left[\frac{e^{i(n-p)t}}{n-p}\right]_0^{2\pi} = 0$, d'où :

$$\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-ipt} = a_p r^p\, 2\pi$$

, ce qui est bien l'égalité cherchée.

(b) D'après l'égalité (4) et l'inégalité triangulaire dans une intégrale :

$$\forall r>0\ \forall n\in\mathbb{N}\quad |a_n| r^n \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{it})|\,dt \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} M(f,r)\,dt = M(f,r)$$

ce qui nous donne bien l'inégalité (5) demandée.

(c) Prenons $f(z)=\exp(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}$ de sorte que $f\in\mathcal{E}$ puisque le rayon de convergence de cette SE est infini. Par unicité des coefficients dans un développement en SE, f ne peut être un polynôme puisque la suite $\left(\frac{1}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas nulle à partir d'un certain rang.

(d) Soit $f\in\mathcal{E}$ telle que $\exists M>0\ \forall z\in\mathbb{C}\ |f(z)|\leq M$. Fixons $n\in\mathbb{N}^*$ et faisons tendre r vers $+\infty$ dans l'inégalité (5) :

$$\forall r>0\quad |a_n| \leq \frac{M(f,r)}{r^n} \leq \frac{M}{r^n}$$

Nous en déduisons $a_n=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, d'où $f(z)=a_0$.
Réciproquement, les fonctions constantes sont évidemment entières et bornées.

(e) Le sens direct est évident puisque la série est en fait une somme finie.
Réciproquement, si $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ cvg unif^t sur $\mathbb{C}$, elle satisfait le critère de Cauchy uniforme, donc en particulier : $\exists N\in\mathbb{N}^*\ \forall q\geq p\geq N\ \forall z\in\mathbb{C}\ \left|\sum_{n=p}^{q} a_n z^n\right| \leq 1$
En prenant $p=N$ et en faisant $q\to+\infty$, on en déduit :

$$\forall z\in\mathbb{C}\quad \left|\sum_{n=N}^{+\infty} a_n z^n\right| \leq 1$$

Ainsi, la fonction entière $g(z) := \sum_{n=N}^{+\infty} a_n z^n$ est bornée sur $\mathbb{C}$, ce qui implique d'après la question précédente qu'elle est constante. Nous en déduisons que $a_n = 0$ pour tout $n \geq N$, d'où $f \in \mathcal{P}$.

[Question difficile, l'indication n'était pas véritablement aidante]

2) (a) D'après 1)(a), nous avons :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall r > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n^{(k)} r^n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_k(re^{it})\, e^{-int}\, dt$$

Soit $r > 0$ fixé. Puisque (f_k) cvg unif^t vers f sur le compact $\{|z| = r\}$, on a :

$$\sup_{t \in [0,2\pi]} \left| f_k(re^{it})e^{-int} - f(re^{it})e^{-int} \right| = \sup_{|z|=r} |f_k(z) - f(z)| \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$$

Ainsi, par cvg uniforme sur $[0, 2\pi]$ de $\left(f_k(re^{it})e^{-int}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ vers $f(re^{it})e^{-int}$, nous avons :

$$a_n^{(k)} r^n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_k(re^{it})\, e^{-int}\, dt \xrightarrow[k \to +\infty]{} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{it})\, e^{-int}\, dt \quad (*)$$

Pour $r = 1$, ceci prouve que $(a_n^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ converge. Si nous notons $a_n = \lim_{k \to +\infty} a_n^{(k)}$, nous avons donc :
$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})e^{-int}\,dt$$
Revenant à $(*)$ pour $r > 0$ arbitraire, nous obtenons aussi :
$$a_n r^n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{it})\, e^{-int}\, dt$$
Puisque f est limite uniforme sur tout compact de la suite d'applications continues $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$, f est elle-même continue sur $\mathbb{C}$. En procédant comme dans 1)(b), on a donc : $\forall r > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \leq \dfrac{M(f,r)}{r^n}$, où $M(f,r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$

Pour tout $r > 0$, $(|a_n| r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc une suite bornée, ce qui signifie que le rayon de convergence de $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ est infini. Soit $g \in \mathcal{E}$ sa somme.

Nous allons maintenant montrer que $f = g$, ce qui nous donnera la conclusion.

Soient $r > 0$ et $\varepsilon > 0$ arbitraires fixés. Puisque $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ cvg unif^t vers f sur $\{|z| \leq r\}$,
$$\exists K \in \mathbb{N} \quad \forall k \geq K \quad \sup_{|z| \leq r} |f_k(z) - f(z)| < \varepsilon$$
Pour tout z tel que $|z| \leq r$, nous avons donc : $|f(z) - g(z)| \leq |f(z) - f_K(z)| + |f_K(z) - g(z)|$
$$\leq \varepsilon + \left|\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n^{(K)} - a_n) z^n\right|$$

Or, toujours en procédant comme dans 1(b),
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n^{(K)} - a_n| \leq \frac{1}{r^n} \sup_{|z|=r} |f_K - f| < \frac{\varepsilon}{r^n}$$

Ainsi, si $|z| \leq \frac{r}{2}$, nous obtenons : $|f(z) - g(z)| \leq \varepsilon + \varepsilon \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{|z|}{r}\right)^n \leq 2\varepsilon$

Comme $\varepsilon > 0$ était arbitraire, nous en déduisons : $|z| \leq \frac{r}{2} \Rightarrow f(z) = g(z)$.

Enfin, comme $r > 0$ était arbitraire, nous en déduisons :
$$f = g \in \mathcal{E}$$

(b) S'il existe une suite de polynômes (P_n) qui cvg unif^t vers f sur tout compact de $\mathbb{C}$, la question précédente permet d'en déduire que $f \in \mathcal{E}$ puisque $(P_n) \in \mathcal{P}^{\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}^{\mathbb{N}}$.

Réciproquement, supposons $f \in \mathcal{E}$ avec $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ et définissons $(P_n) \in \mathcal{P}^{\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall z \in \mathbb{C} \qquad P_n(z) := \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

Le rayon de la SE $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ étant infini, nous savons que celle-ci converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$ vers f, ce qui revient exactement à dire que (P_n) cvg unif^t vers f sur tout compact de $\mathbb{C}$.

(c) Les séries entières définissant f et g étant toutes les deux de rayon infini, elles convergent absolument sur $\mathbb{C}$. Nous en déduisons que leur produit de Cauchy est une série entière qui converge sur $\mathbb{C}$ vers fg, d'où $fg \in \mathcal{E}$.

(d) Soit $(P_n) \in \mathcal{P}^{\mathbb{N}}$ convergeant uniformément vers f sur tout compact de $\mathbb{C}$ (l'existence d'une telle suite a été prouvée au b)). Pour tout $R > 0$, nous avons donc :

$$\sup_{|z| \leq R} |P_n(z) - f(z)| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, définissons $g_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ par

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad g_n(z) = P_n(z+a)$$

Il est immédiat de vérifier que $g_n \in \mathcal{P}$ puisque $P_n \in \mathcal{P}$.

En outre, l'inégalité triangulaire $|z+a| \leq |z| + |a|$ implique :

$$\sup_{|z| \leq R} |g_n(z) - g(z)| = \sup_{|z| \leq R} |P_n(z+a) - f(z+a)| \leq \sup_{|z'| \leq R+|a|} |P_n(z') - f(z')| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Ainsi, g est limite uniforme sur tout compact de $\mathbb{C}$ d'une suite de polynômes $(g_n) \in \mathcal{P}^{\mathbb{N}}$, ce qui implique $g \in \mathcal{E}$ d'après b).

3)(a) La SE $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ ayant un rayon de convergence infini, nous avons :

$$\forall R > 0 \quad (|a_n| R^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}$$

Or l'hypothèse (ii) nous donne :

$$\forall r > 0 \;\; \forall n \in \mathbb{N} \quad |\lambda_n a_n| r^n \leq A |a_n| (Br)^n$$

En prenant $R = Br$, nous en déduisons que la suite $(|\lambda_n a_n| r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée pour $r > 0$ arbitraire, ce qui signifie que la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n a_n z^n$ a un rayon de convergence infini.

(b) • Nions l'hypothèse (ii) :

$\forall A>0\ \forall B>0\ \exists n\in\mathbb{N}\quad |\lambda_n| > AB^n$

Construisons une suite $(n_j)\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ strictement croissante telle que $|\lambda_{n_j}| > j^{n_j}$ pour tout $j\in\mathbb{N}$; nous raisonnons par récurrence.

Pour $j=0$, nous prenons $A=B=1$ de sorte que $\exists n_0\in\mathbb{N}\quad |\lambda_{n_0}| > 1 > 0^{n_0}$

Supposons démontrée l'existence des entiers $n_0 < n_1 < \cdots < n_{j-1}$

Prenons $A = \max\{|\lambda_i|,\ 0\leq i\leq n_{j-1}\}$ et $B=j$ de sorte que :

$\exists n_j\in\mathbb{N}\quad |\lambda_{n_j}| > A\, j^{n_j}$

Ceci implique bien sûr $n_j > n_{j-1}$ (puisque $|\lambda_{n_j}| > A$) et entraîne $|\lambda_{n_j}| > j^{n_j}$ puisque $A \geq |\lambda_{n_0}| > 1$.

La suite $(n_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ dont nous venons de prouver l'existence satisfait les hypothèses de l'énoncé.

• Considérons maintenant la SE $\sum_{j\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{j^{n_j}} z^{n_j}$. Nous constatons que son rayon de convergence est infini grâce à la règle de Cauchy puisque : $0 \leq \left(\frac{1}{j^{n_j}}\right)^{1/n_j} = \frac{1}{j} \xrightarrow[j\to+\infty]{} 0$

Cependant, pour $r>1$ et $j\in\mathbb{N}^*$, $|\lambda_{n_j} a_{n_j}|\, r^{n_j} > r^{n_j}$ implique que la suite $(|\lambda_{n_j} a_{n_j}|\, r^{n_j})_{j\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas bornée, ce qui prouve que le rayon de convergence de la SE $\sum_{j\in\mathbb{N}^*} a_{n_j}\lambda_{n_j} z^{n_j}$ est inférieur ou égal à 1. Par conséquent, (λ_n) n'est pas un multiplicateur de $\mathcal{E}$.

• Nous avons ainsi démontré par l'absurde que i) implique ii).

4) (a) En utilisant 2)(d) avec $a=1$ et le fait que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel, nous obtenons immédiatement :

$f\in\mathcal{E} \Rightarrow \Delta f\in\mathcal{E}$

(b) $\operatorname{Ker}\Delta$ est le s.e.v. de $\mathcal{E}$ constitué par les fonctions entières 1-périodiques.

Pour tout $n\in\mathbb{Z}$, définissons $f_n : \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ par

$\forall z\in\mathbb{C}\qquad f_n(z) = \exp(i2\pi n z)$

Nous constatons que $f_n\in\operatorname{Ker}\Delta$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$ et nous savons d'après le cours sur les séries de Fourier que $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille libre. Ainsi $\operatorname{Ker}\Delta$ est de dimension infinie.

5) (a) L'inégalité triangulaire pour les intégrales nous donne :

$$|I| \leq \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})| \rho \, dt \leq 2\pi M(f,\rho)\rho$$

(b) Si $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, cette SE ayant un rayon de cvg infini, alors elle converge normalement sur le cercle $\{|w| = \rho\}$, avec $\rho > 0$ arbitraire. Nous en déduisons que la série d'applications $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n (\rho e^{it})^n i\rho e^{it}$ converge normalement (donc uniformément) sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ vers $f(\rho e^{it}) i\rho e^{it}$

Cette convergence uniforme nous autorise à faire l'interversion suivante :

$$I = \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \rho^{n+1} e^{i(n+1)t} i \, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n i \rho^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt = 0$$

puisque $\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt = \left[\frac{e^{i(n+1)t}}{i(n+1)} \right]_0^{2\pi} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) Pour tout $k \geq 0$, l'application $w \to w^k h(w)$ est entière donc, d'après la question précédente :

$$\int_{|w|=\rho} w^k h(w) \, dw = 0$$

ce qui nous donne bien $J_k(h,\rho) = 0$.

Pour $k = -1$, nous avons :

$$J_{-1}(h,\rho) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} (\rho e^{it})^{-1} h(\rho e^{it}) i\rho e^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0 h(\rho e^{it}) \, dt$$

Supposons que $h(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Alors, en utilisant la formule (4) obtenue dans la question 1)(a) pour $n = 0$, nous obtenons :

$$J_{-1}(h,\rho) = a_0 = h(0)$$

6) (a) Pour tout $w \in \mathbb{C}$, on a : $e^w = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{w^n}{n!} = 1 + w + w^2 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{w^{n-2}}{n!}$

d'où l'égalité demandée en posant $g(w) := \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{w^{n-2}}{n!}$ pour tout $w \in \mathbb{C}$.

Cette dernière SE étant convergente pour tout $w \in \mathbb{C}$, ceci assure que $g \in \mathcal{E}$.

L'inégalité triangulaire implique pour tout $N \geq 2$ et $w \in \mathbb{C}$ tel que $|w| \leq 1$:

$$\left| \sum_{n=2}^{N} \frac{w^{n-2}}{n!} \right| \leq \sum_{n=2}^{N} \frac{|w|^{n-2}}{n!} \leq \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n!}$$

En passant à la limite lorsque $N \to +\infty$, nous obtenons :

$$|w| \leq 1 \quad \Rightarrow \quad |g(w)| \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e - \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} = e-2$$

(b) i) Pour tout $w \in \mathbb{C}$ tel que $|w| = 1$, nous avons d'après (a) :

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad \frac{w^k}{e^w - 1} = \frac{w^k}{w + w^2 g(w)} = \frac{w^{k-1}}{1 + w g(w)}$$

avec $|1 + w\, g(w)| \geq 1 - |w||g(w)| \geq 1 - |g(w)| \geq 3 - e > 0$

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, I_k est bien définie et l'on a

$$I_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ikt}}{1 + e^{it} g(e^{it})} \, dt$$

ii) Pour tout $t \in [0, 2\pi]$, nous avons $|e^{it} g(e^{it})| \overset{a)}{\leq} e - 2 < 1$ de sorte que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-e^{it} g(e^{it}))^n$ converge normalement sur $[0, 2\pi]$ vers $\dfrac{1}{1 + e^{it} g(e^{it})}$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, comme $|e^{ikt}| = 1 \ \forall t \in [0, 2\pi]$,

nous avons aussi la convergence normale de $\sum_{n \in \mathbb{N}} e^{ikt} (-e^{it} g(e^{it}))^n$ sur $[0, 2\pi]$ vers $\dfrac{e^{ikt}}{1 + e^{it} g(e^{it})}$, ce qui justifie l'interversion suivante :

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad I_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{i(k+n)t} g^n(e^{it}) \, dt = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^{2\pi} e^{i(k+n)t} g^n(e^{it}) \, dt$$

Comme $g^n \in \mathcal{E}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'après 2)(c) (on a posé $g^0 \equiv 1$), nous pouvons encore écrire cette égalité avec les notations du 5)(c) :

$$\forall k \in \mathbb{Z} \qquad I_k = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n J_{k+n-1}(g^n, 1)$$

Or, toujours d'après 5)(c), $J_\ell(h, 1) = 0$ pour tout $\ell \geq 0$ et $h \in \mathcal{E}$. Nous en déduisons que $I_k = 0$ pour tout $k \geq 1$ (puisque $k+n-1 \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ dans ce cas). En outre, comme $J_{-1}(h, 1) = h(0)$ pour $h \in \mathcal{E}$:

$$I_0 = J_{-1}(g^0, 1) + 0 = g^0(0) = 1$$

III A)

1) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$ fixés. La SE qui définit l'exponentielle étant normalement convergente sur tout compact, on a convergence uniforme sur $[0, 2\pi]$ de la série d'applications $\sum_{p \in \mathbb{N}} \frac{z^p}{p!} e^{ipt}$ vers $\exp(z e^{it})$.

N.B. Le compact ici considéré est le cercle de centre 0 et de rayon $|z|$ dans $\mathbb{C}$.

En outre, l'application $\frac{1}{w^n(e^w - 1)} = \frac{1}{w^{n+1}(1 + w g(w))}$ est bornée sur le cercle $|w| = 1$ d'après II 6) (a).

On en déduit la cvg uniforme sur $[0, 2\pi]$ de $\sum_{p \in \mathbb{N}} \frac{z^p e^{ipt}}{p!(\exp(e^{it}) - 1)} \frac{1}{e^{i(n-1)t}}$ vers $\frac{\exp(ze^{it})}{\exp(e^{it}) - 1} \frac{1}{e^{i(n-1)t}}$ qui justifie l'interversion suivante :

$$B_n(z) = \frac{n!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{z^p e^{ipt}}{p!(\exp(e^{it} - 1))} \frac{dt}{e^{i(n-1)t}} = \frac{n!}{2\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{z^p}{p!} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i(p-n)t}}{\exp(e^{it}) - 1} e^{it} dt$$

$$B_n(z) = n! \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{z^p}{p!} I_{p-n}$$

Or, d'après la question précédente, $I_k = 0$ dès que $k \geq 1$, si bien que :

$$B_n(z) = n! \sum_{p=0}^{n} \frac{I_{p-n}}{p!} z^p \quad \text{, polynôme de degré } \leq n.$$

Pour $n = 0$, on trouve : $B_0(z) = I_0 = 1$ (d'après II 6 (b)(ii))

2) (a) $\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall x \in \mathbb{R}$

$$B_n'(x) = n! \sum_{p=1}^{n} I_{p-n} \frac{x^{p-1}}{(p-1)!}$$

$$= n! \sum_{k=0}^{n-1} I_{k-n+1} \frac{x^k}{k!} = n B_{n-1}(x)$$

(b) $\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall z \in \mathbb{C}$

$$B_n(z+1) - B_n(z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{|w|=1} \frac{e^{(z+1)w} - e^{zw}}{e^w - 1} \frac{dw}{w^n}$$

$$B_n(z+1) - B_n(z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{|w|=1} e^{zw} \frac{dw}{w^n}$$

Avec un argument similaire à celui du 1), on justifie l'interversion :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{|w|=1} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{z^p w^p}{p!} \frac{dw}{w^n} = \frac{1}{2i\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{z^p}{p!} \int_{|w|=1} w^{p-n} dw \qquad (*)$$

Or $\int_{|w|=1} w^{p-n} dw = i \int_0^{2\pi} e^{i(p-n+1)t} dt = 2i\pi \, \delta_{p, n-1}$ et donc

$(*)$ vaut $\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}$, si bien que $B_n(z+1) - B_n(z) = n z^{n-1}$

Pour $n \geq 2$ et $z = 0$, on en déduit $B_n(1) = B_n(0)$.

3) (a) Pour tout $n \geq 1$, d'après 2), on a :

$$\int_0^1 B_n(x)\,dx = \int_0^1 \frac{B'_{n+1}(x)}{n+1}\,dx = \frac{B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0)}{n+1} = 0$$

(b) Nous savons que $B_0 = 1$ et, d'après (8), $B'_1(x) = B_0(x) = 1$ d'où $B_1(x) = x + c_1$, $c_1 \in \mathbb{C}$. Or $\int_0^1 B_1 = 0$ d'après la question précédente, d'où $\frac{1}{2} + c_1 = 0$ et donc $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$.

De la même façon, $B'_2(x) = 2B_1(x) = 2x - 1$ d'où $B_2(x) = x^2 - x + c_2$ et $\int_0^1 B_2 = 0$ nous donne $\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + c_2 = 0$. Ainsi, $B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$.

Enfin, $B'_3(x) = 3B_2(x) = 3x^2 - 3x + \frac{1}{2}$ d'où $B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + c_3$ et $\int_0^1 B_3 = 0$ nous donne $\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + c_3 = 0$. Ainsi $B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$.

4) (a) Grâce à une intégration par parties, nous pouvons écrire :

$$\int_0^1 h = \int_0^1 h B'_1 = [hB_1]_0^1 - \int_0^1 h' B_1 = \frac{h(1)+h(0)}{2} - \int_0^1 h' B_1$$ d'après l'expression de B_1 trouvée dans la question précédente.

(b) En effectuant de nouveau une IPP, nous obtenons, puisque $h \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{C})$:

$$\int_0^1 h' B_1 = \int_0^1 h' \frac{B'_2}{2} = \left[h' \frac{B_2}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 h'' \frac{B_2}{2} = \frac{h'(1) - h'(0)}{12} - \int_0^1 h'' \frac{B_2}{2}$$

On conclut alors grâce à l'égalité du (a).

5) (a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, nous appliquons l'égalité trouvée dans la question précédente à $h_n(t) := \varphi(n+t)$, $t \in [0,1]$.

$$\int_0^1 h_n = \frac{h_n(0) + h_n(1)}{2} + \frac{h'_n(0) - h'_n(1)}{12} + \frac{1}{2}\int_0^1 h''_n(t) B_2(t)\,dt \qquad (**)$$

On a bien sûr : $\forall t \in [0,1]$ $h'_n(t) = \varphi'(n+t)$ et $h''_n(t) = \varphi''(n+t)$

En outre, la définition de π_2 nous donne :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\forall t \in [n, n+1[$ $\pi_2(t) = \frac{1}{2} B_2(t-n)$

si bien que, par un simple changement de variable, nous obtenons :

$$\frac{1}{2}\int_0^1 h''_n(t) B_2(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 \varphi''(n+t) B_2(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_n^{n+1} \varphi''(t) B_2(t-n)\,dt$$
$$= \int_n^{n+1} \varphi''(t)\pi_2(t)\,dt$$

Finalement, $(**)$ se réécrit, toujours par simple changement de variable :

$$\int_n^{n+1} \varphi(t)\,dt = \int_0^1 h_n(t)\,dt = \frac{\varphi(n) + \varphi(n+1)}{2} + \frac{\varphi'(n) - \varphi'(n+1)}{12} + \int_n^{n+1} \varphi''(t)\pi_2(t)\,dt$$

(b) Il suffit d'additionner les égalités du (a) pour $n = 1, \dots, N-1$ pour obtenir (Chasles) :

$$I_N = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N-1} (\varphi(n) + \varphi(n+1)) + \frac{1}{12}\sum_{n=1}^{N-1} (\varphi'(n) - \varphi'(n+1)) + \int_1^N \varphi'' \pi_2$$
$$= \frac{1}{2}(S_N - \varphi(N)) + \frac{1}{2}(S_N - \varphi(1)) + \frac{1}{12}(\varphi'(1) - \varphi'(N)) + \int_1^N \varphi'' \pi_2$$

d'où $S_N = I_N + \frac{\varphi(1) + \varphi(N)}{2} + \frac{1}{12}(\varphi'(N) - \varphi'(1)) - \int_1^N \varphi'' \pi_2$

(c) Puisque φ'' est intégrable sur $[1,+\infty[$, en posant $l = \int_1^{+\infty} \varphi''$, ns avons :

$$\varphi'(N) - \varphi'(1) = \int_1^N \varphi'' \xrightarrow[N\to+\infty]{} l$$

En outre, π_2 étant bornée, $\varphi''\pi_2$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, et donc d'après (b)

$$S_N - I_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{\varphi(1)}{2} + \frac{l}{12} - \int_1^{+\infty} \varphi''\pi_2$$

(S_N) et (I_N) sont donc de m̂ nature.

Si $\sum_{n\geq 1} \varphi(n)$ dvg alors (I_N) dvg et donc $\int_1^{+\infty} \varphi(t)\,dt$ dvg

Si $\sum_{n\geq 1} \varphi(n)$ cvg alors (I_N) cvg ; notons $I = \lim I_N$

Comme $\lim_{+\infty} \varphi = 0$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathbb{N}$ $t \geq A \Rightarrow |\varphi(t)| < \varepsilon$

En outre, $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ $N \geq N_0 \Rightarrow |I_N - I| < \varepsilon$

Soit $x \geq \max(A, N_0)$ et $N = [x]$ $(\geq \max(A, N_0)$ aussi$)$

$$\left|\int_1^x \varphi - I\right| \leq \left|\int_1^x \varphi - \int_1^N \varphi\right| + |I_N - I|$$

$$\leq \int_N^x |\varphi| + \varepsilon < 2\varepsilon$$

Ns avons prouvé que $\int_1^{+\infty} \varphi$ cvg.

(d) Posons $\varphi(t) = \frac{e^{i\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}$, $t \in [1,+\infty[$ de sorte que $\varphi(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.

$$\varphi'(t) = \frac{1}{t}\left(\frac{i}{2\sqrt{t}} e^{i\sqrt{t}} \sqrt{t} - e^{i\sqrt{t}} \frac{1}{2\sqrt{t}}\right) = \frac{e^{i\sqrt{t}}}{2t^{3/2}} (i\sqrt{t} - 1)$$

$$\varphi''(t) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{t^3}\left(\frac{i}{2\sqrt{t}} e^{i\sqrt{t}} t^{3/2} - e^{i\sqrt{t}} \frac{3}{2}\sqrt{t}\right)(i\sqrt{t} - 1) + \frac{e^{i\sqrt{t}}}{2t^{3/2}} \frac{i}{2\sqrt{t}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{t^2}\left(\frac{i}{2} e^{i\sqrt{t}} - \frac{3}{2}\frac{e^{i\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\right)(i\sqrt{t} - 1) + \frac{i e^{i\sqrt{t}}}{4t^2}\right]$$

$$= O\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$$ donc $|\varphi''|$ est intégrable sur $[1,+\infty[$

Ainsi $\sum \frac{e^{i\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$ est de m̂ nature que $\int_1^{+\infty} \frac{e^{i\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,dt$

Or, par chgmt $u = \sqrt{t}$, $\int_1^A \frac{e^{i\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,dt = 2\int_1^{\sqrt{A}} e^{iu}\,du$ d'où la divergence de l'intégrale et donc de la série.