Université Pierre et Marie Curie — **Année 2011-2012**

L3 - Mathématiques — Second semestre

Probabilités - LM390 — Groupe 1

Feuille de TD n°6

Exercice 1

Considérons une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de v.a. telle que X_n suive une loi exponentielle de paramètre λ_n. On suppose que $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$. Soit $Z_n = X_n - [X_n]$, où $[x]$ désigne la partie entière du réel x.
Montrer que Z_n converge en loi. Préciser sa limite.

Exercice 2

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. à valeurs entières telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit la loi

$$\forall k \geq 1, \quad \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{\alpha}{n}\left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^{k-1}, \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } n > \alpha.$$

Montrer que $\left(\frac{X_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ converge en loi. Préciser sa limite.

Exercice 3

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi donnée par $\frac{1}{n}\delta_1 + (1 - \frac{1}{n})\delta_0$.
Étudier les différents modes de convergence de la suite $(X_n)_{n\geq 1}$.

Exercice 4

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - \cos 2n\pi x & \text{si } x \in]0, 1[\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit X_n, une v.a. de densité f_n. Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi bien que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas.

Exercice 5

On considère deux suites de v.a. réelles $(X_n)_{n\geq 1}$ et $(Y_n)_{n\geq 1}$.

1. On suppose que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une v.a. X et que $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers 0. Montrer que la suite $(X_n + Y_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers X.
2. Donner un exemple dans lequel $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une v.a. X, $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une v.a. Y, mais $(X_n + Y_n)_{n\geq 1}$ ne converge pas en loi.

Exercice 6

On considère une suite $(X_n)_{n\geq 0}$ de v.a. indépendantes et de même loi. On définit alors la suite $(Y_n)_{n\geq 0}$ par

$$Y_0 = \frac{X_0}{2}, \quad Y_1 = \frac{X_1 + Y_0}{2}, \quad Y_2 = \frac{X_2 + Y_1}{2}, \ldots, Y_n = \frac{X_n + Y_{n-1}}{2}, \ldots$$

1. Calculer la fonction caractéristique φ_n de Y_n en fonction de n et de la fonction caractéristique de X_1 notée φ.
2. On suppose que la loi commune aux variables X_n est la loi normale centrée $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, $\sigma > 0$. Quelle est la loi de Y_n ? Quelle est la loi limite de $(Y_n)_{n\geq 0}$ lorsque n tend vers l'infini ?

3. Si les variables X_n suivent la loi de Cauchy de densité $[\pi(1+x^2)]^{-1}$, $x \in \mathbb{R}$, montrer que $(Y_n)_{n\geq 0}$ converge en loi lorsque n tend vers l'infini. Préciser la limite.

Exercice 7

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes, de même loi, centrées, de variance σ^2 et de fonction caractéristique Φ. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. On définit aussi la suite $(N_k)_{k\geq 1}$ de v.a. indépendantes telle que pour tout k, N_k est une v.a. de Poisson de paramètre k. On suppose de plus que la suite $(N_k)_{k\geq 1}$ est indépendante de la suite $(X_n)_{n\geq 1}$. Pour tout $k \geq 1$, on pose

$$Z_k = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{N_k}} S_{N_k} & \text{si} \quad N_k \neq 0 \\ X_1 & \text{si} \quad N_k = 0\,. \end{cases}$$

1. Exprimer la fonction caractéristique Φ_k de Z_k en fonction de Φ. Qu'advient-il si X_1 est une gaussienne ?
2. Montrer que pour tout réel t, $\Phi^n(t/\sqrt{n}) \to \exp -\sigma^2 t^2/2$, lorsque $n \to \infty$. En déduire que $(Z_k)_{k\geq 1}$ converge en loi vers une v.a. que l'on précisera.

Exercice 8

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$.

1. Pour tout $n \geq 1$, on pose $Y_n = X_{2n+1} - X_{2n}$. Montrer que la suite $((Y_1 + \cdots + Y_n)/\sqrt{n})_{n\geq 1}$ converge en loi et trouver la loi limite.
2. On définit maintenant la suite $(Z_n)_{n\geq 1}$ par $Z_n = (X_1 X_2 \cdots X_n)^{1/n}$. La suite $(Z_n)_{n\geq 1}$ converge-t-elle ? En quel sens ? Préciser sa limite.

Exercice 9

Avec les hypothèses de l'exercice 8, on définit la suite $(T_n)_{n\geq 1}$ par

$$T_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{si} \quad X_n \leq \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si} \quad X_n > \frac{1}{n}\,. \end{cases}$$

1. Montrer que la suite $(T_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité et trouver sa limite.
2. Vérifier que la série de probabilités

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|T_{n^2} - 1| > \varepsilon)$$

   est convergente pour tout $\varepsilon > 0$. En déduire la convergence presque sure de la suite $(T_{n^2})_{n\geq 1}$.

Exercice 10

Soient X_n, $n \geq 1$ des v.a. de fonction de répartition F_n.

1. On suppose que $\mathbb{P}(X_n = 1/n) = 1$. $(X_n)_{n\geq 1}$ converge-t-elle ? En quel sens ? Préciser sa limite. $F_n(x)$ converge-t-elle vers $F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$?
2. On suppose que $X_n = n$, *p.s.*. F_n tend-elle vers une fonction de répartition ?

Exercice 11
Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de v.a. indépendantes de même loi de fonction caractéristique Φ. On suppose que $\mathbb{E}[X_1^2] < +\infty$. Posons $Y_n = (-1)^n X_n$.

1. Quelle est la fonction caractéristique de Y_n ? Quelle condition faut-il imposer à la loi de $(X_n)_{n\geq 0}$ pour que $(Y_n)_{n\geq 0}$ converge en loi ?
2. Quelle condition faut-il imposer à la loi de $(X_n)_{n\geq 0}$ pour que $(Y_n)_{n\geq 0}$ converge en probabilité ?
3. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_{2k}$, $T_n = \sum_{k=1}^n X_{2k+1}$ et $V_n = S_n/T_n$ (on suppose que $\mathbb{P}(T_n = 0) = 0$). Que pouvez-vous dire du comportement asymptotique de $(V_n)_{n\geq 0}$? (*On traitera en premier lieu le cas* $\mathbb{E}[X_1] \neq 0$.)

Exercice 12
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. Quelle est la loi de $X_1 + \cdots + X_n$? Que vaut $\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \leq n)$?
2. Utiliser le théorème central limite pour montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 13
Soient $b > 0$ et $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables indépendantes, de loi commune la loi gamma de paramètre b. On pose : $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

1. Montrer que S_n/n converge presque sûrement, lorsque $n \to \infty$, vers un réel c que l'on calculera.
2. Montrer que $\sqrt{n}\,(S_n/n - c)$ converge en loi, vers une loi limite que l'on identifiera.
3. Montrer que $n\,(S_n/n - c)^2$ converge en loi, vers une loi limite que l'on identifiera.
4. Montrer que $\sqrt{n}\left((S_n/n)^2 - c^2\right)$ converge en loi, vers une loi limite que l'on identifiera.
   Plus généralement, si $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, montrer que $\sqrt{n}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(c)\right)$ converge en loi, vers une loi limite que l'on identifiera.

Exercice 14
Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose, pour tout $n \geq 1$, $X_n = \max(U_1, \ldots, U_n)$. Montrer que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers 1.

Exercice 15
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. Soit F_n la fonction de répartition de X_n donnée par
$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0, \\ 1 - \frac{1}{x+n}, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$
On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et $Y_n = \dfrac{S_n}{n}$. Montrer que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers 0, mais pas la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$.