Université Pierre et Marie Curie | **Année 2011-2012**
L3 - Mathématiques | Second semestre
Probabilités - LM390 | Groupe 1

FEUILLE DE TD N°1

Exercice 1
Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tels que $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 3/4$. Trouver les valeurs maximales et minimales de $\mathbb{P}(A \cap B)$. Donner un exemple.

Exercice 2
Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. On tire 4 fois de suite une boule avec remise.

1. Décrire l'espace probabilisé associé à cette expérience.
2. Déterminer les probabilités d'obtenir :
   (a) Quatre nombres dans un ordre strictement croissant.
   (b) Quatre nombres dans un ordre croissant (au sens large).
   (c) Que le nombre 3 apparaisse au moins une fois.
   (d) Que la somme des nombres obtenus soit égale à 13.

Exercice 3

1. Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On tire successivement sans remise n, $(1 \leq n \leq N)$ boules de l'urne. Quel est l'ensemble Ω des résultats possibles ? Calculer card(Ω).
2. Les boules numérotées de 1 à M sont rouges $(M < N)$ et les boules numérotées de $M+1$ à N sont blanches. Soit A_k l'événement "La $k^{\text{ème}}$ boule tirée est rouge".
   (a) Calculer $\mathbb{P}(A_k)$.
   (b) Calculer $\mathbb{P}(A_k \cap A_m)$.

Exercice 4
Une urne contient 20 boules numérotées de 1 à 20. On tire n boules sans remise de cette urne et on note X le plus petit des numéros tirés.

1. Décrire l'espace probabilisé associé à cette expérience.
2. On suppose que $n = 3$. Calculer $\mathbb{P}(X = 8)$ et $\mathbb{P}(X \geq 8)$.
3. On revient au cas général où $n \leq 20$. Calculer de façon indépendante :
   (a) $\mathbb{P}(X = k)$,
   (b) $\mathbb{P}(X \geq k)$.

Exercice 5
Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ des événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\mathbb{1}_{\cap_{k=1}^n A_k} = \prod_{k=1}^n \mathbb{1}_{A_k}\,.$$

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\mathbb{1}_{\cup_{k=1}^n A_k} = 1 - \prod_{k=1}^{n} (1 - \mathbb{1}_{A_k}) \,.$$
3. On note $p_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k})$. Montrer que
$$\mathbb{P}(\cup_{k=1}^n A_k) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} p_k \,.$$
4. Un facteur répartit au hasard n factures dans n boîtes aux lettres (une par boîte). Calculer la probabilité $p(n)$ qu'une facture au moins parvienne à son destinataire. Calculer $\lim_{n \to +\infty} p(n)$.

Exercice 6
Lors d'un examen à correction automatique, on pose dix questions et pour chacune d'elles on demande au candidat de choisir entre trois réponses (la bonne et deux fausses). On envisage le cas d'un candidat qui répond absolument au hasard à toutes les questions. Soit X le nombre de réponses justes de ce candidat. Calculer la loi de X.

Exercice 7
On considère trois événements A, B et X d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tels que $\mathbb{P}(A) = 1/2$, $\mathbb{P}(B) = 3/5$, $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/5$, $\mathbb{P}(X \mid A) = \mathbb{P}(X \mid B) = 1/2$ et $1/\mathbb{P}(X) \in \mathbb{N}$. Calculer $\mathbb{P}(X)$.

Exercice 8
Une urne contient trois sacs. Le sac S_1 contient 2 pièces d'or, le sac S_2 contient 2 pièces ordinaires, le sac S_3 contient une pièce d'or et une pièce ordinaire. Le jeu consiste à tirer un sac au hasard (avec probabilité uniforme) puis à tirer une pièce au hasard dans ce sac.

1. Quelle est la probabilité de tirer une pièce d'or ?
2. Supposons que l'on ait tiré une pièce d'or. Quelle est alors la probabilité pour que l'autre soit en or ?

Exercice 9
Un document a été perdu. La probabilité pour qu'il se trouve dans un meuble est p $(0 < p < 1)$. Ce meuble comporte sept tiroirs. On explore six tiroirs sans trouver le document. Quelle est la probabilité de le trouver dans le septième ?

Exercice 10
Soient X et Y deux v.a. indépendantes, prenant toutes les valeurs entières entre 1 et n, avec les probabilités : $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = k) = 1/n$, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$.
Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$ et $\mathbb{P}(X \geq Y)$. Déterminer la loi de $X - Y$.

Exercice 11
Un lac contient N poissons. (N est inconnu et $N > 2000$). On pêche 1000 poissons, on les marque et on les rejette à l'eau. On repêche alors 1000 poissons. Soit X la v.a. égale au nombre de poissons marqués parmi ceux que l'on a repêchés.

1. Calculer la loi de X.
2. En réalité, on a repêché 10 poissons marqués. Déterminer N pour que $P(X = 10) \geq P(X = k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et que $\mathbb{P}(X = 10)$ soit le plus grand possible.