Université Pierre et Marie Curie — **Année 2011-2012**
L3 - Mathématiques — Second semestre
Probabilités - LM390 — Groupe 1

CORRECTION INTERROGATION N°1 – 5 MARS 2012

Exercice 1. 1. L'espace probabilisé associé à cette expérience peut s'écrire

$$\Omega = \{(a_1, a_2, a_3) : a_i = 0, \ldots, 9\}.$$

Le cardinal de l'ensemble Ω est $\mathrm{card}(\Omega) = 10^3$. La probabilité définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$ est la probabilité uniforme, *i.e.* $\forall \omega \in \Omega, \mathbb{P}(\{\omega\}) = 1/10^3$. La probabilité de tout élément A de $\mathcal{P}(\Omega)$ se calcule alors ainsi

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)}.$$

2. (a) Soit A_1 l'ensemble de tous les triplets dans un ordre strictement croissant. Alors il est clair que le nombre d'éléments de A_1 est le nombre de combinaisons $C_{10}^3 = 10!/(3!7!)$. La probabilité d'obtenir quatre nombres dans un ordre strictement croissant est donc $\mathbb{P}(A_1) = C_{10}^3/10^3$.

   (b) Soit A_2 l'ensemble de tous les triplets dans un ordre croissant au sens large. Dans A_2, il y a 10 tridruplets de nombres tous identiques, $2 \times C_{10}^2$ triplets de nombres dont deux sont égaux et C_{10}^3 triplets de nombres tous distincts. Soit $\mathbb{P}(A_2) = (10 + 2 \times C_{10}^2 + C_{10}^3)/10^3$.

   On peut aussi raisonner de la manière suivante : l'application

$$(a_1, a_2, a_3) \longmapsto (a_1, a_2 + 1, a_3 + 2)$$

   est une bijection de A_2 sur l'ensemble $A_2' = \{(a_1, a_2, a_3) : a_1 < a_2 < a_3,\ a_i = 0, \ldots, 11\}$. Le cardinal de A_2 est donc égal à celui de A_2', c'est à dire C_{12}^3.

   (c) Notons A_3 cet événement. Compter les triplets de nombres compris entre 0 et 9 dont la somme est égale à 8 revient à compter les triplets de nombres compris entre 1 et 10 dont la somme est égale à 11, *i.e.* le nombre de manières de choisir 2 points parmi les 10 intervalles qui séparent 11 objets alignés, soit $\mathrm{card}(A_3)=C_{10}^2$ et $\mathbb{P}(A_3) = C_{10}^2/10^3$.

Exercice 2. • Si $n = 2$, le premier passager a une chance sur deux de s'asseoir à sa place et donc la probabilité que le dernier (ici le second) soit à sa place est de $\frac{1}{2}$.

• Si $n = 3$, notons A_k l'événement "le passager k est à sa place" et A_k^c son complémentaire. Alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_3) &= \mathbb{P}(A_3|A_1)\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_3|A_1^c)\mathbb{P}(A_1^c) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\mathbb{P}(A_3|A_1^c) \\
&= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(\mathbb{P}(A_3|A_1^c, A_2)\mathbb{P}(A_2|A_1^c) + \mathbb{P}(A_3|A_1^c, A_2^c)\mathbb{P}(A_2^c|A_1^c)\right) \\
&= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(0.\frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

- Dans le cas général, on dénote par p_n la probabilité que le dernier passager trouve sa place dans un avion de n places. Fixons $n > 2$. Quand le premier passager prend sa place, il choisit la place k avec probabilité $1/n$. Si $k = 1$, le dernier passager est sûr d'avoir sa place, si $k = n$, il est sûr de ne pas l'avoir. Si $1 < k < n$, alors les passagers numéros 2 à $k-1$ prennent leur place et le k-ième passager se retrouve maintenant dans la même situation que le premier passager, mais avec un avion de $n-k+1$ places. On a alors la récurrence

$$p_n = 1/n + 1/n(p_2 + \cdots + p_{n-1}).$$

Montrons que $p_n = 1/2$ pour tout $n \geq 2$. On sait que cela est vrai pour $n = 2$. Supposons pour un n fixé que c'est vrai pour tout $2 \leq k < n$. On a alors $p_n = 1/n + 1/n(p_2 + \cdots + p_{n-1}) = 1/n + (n-2)/(2n) = 1/2$, ce qui donne le résultat.

Exercice 3.

1. L'espace probabilisé associé à cette expérience peut s'écrire

$$\Omega = \{(a_1, a_2, \ldots, a_m) : a_i \in \{1, \ldots, M\}, a_i \neq a_i, \text{ si } i \neq j\}.$$

Le cardinal de cet ensemble est card(Ω)=$A_M^m = M(M-1)\cdots(M-m+1)$. Celui-ci étant muni de la probabilité uniforme, on a pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$,

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}.$$

2. D'une part, $A_k := \{B_k = 1\} = \{(a_1, \cdots, a_m) \in \Omega : a_k \in \{1, 2, \cdots, b\}\}$. D'autre part, l'application

$$\begin{array}{ccc} A_k & \longrightarrow & A_1 \\ (a_1, \ldots, a_k, \ldots, a_m) & \mapsto & (a_k, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_1, a_{k+1}, \ldots, a_m) \end{array}$$

est une bijection de A_k dans A_1, d'où Card(A_k) = Card(A_1). Or Card$(A_1) = b(M-1)\cdots(M-m+1)$ et l'on a $\mathbb{P}(A_k) = b/M$. (Remarquons que la probabilité de l'événement A_k ne dépend pas de k et est égale à la proportion de boules blanches dans l'urne).

Pour $k \neq \ell$, de même qu'à la question précédente, on peut établir une bijection entre $\{B_k = 1\} \cap \{B_\ell = 1)\}$ et $\{B_1 = 1\} \cap \{B_2 = 1)\}$, d'où $\mathbb{P}(B_k = 1, B_\ell = 1) = \mathbb{P}(B_1 = 1, B_2 = 1) = \frac{\text{Card}(\{B_1=1\}\cap\{B_2=1)\})}{\text{Card}(\Omega)}$ et Card$(\{B_1 = 1\} \cap \{B_2 = 1)\}) = b(b-1)(M-2)\cdots(M-m+1)$. D'où

$$\mathbb{P}(B_k = 1, B_\ell = 1) = \frac{b(b-1)}{M(M-1)} \neq \mathbb{P}(B_k = 1)\mathbb{P}(B_\ell = 1) = \frac{b^2}{M^2}.$$

Donc les v.a. $(B_k)_{1 \leq k \leq m}$ ne sont pas indépendantes.

3. Pour $1 \leq k \leq m$, par le même argument de bijection, on a

$$\mathbb{P}(S_m = k) \quad = \quad C_m^k \frac{A_b^k A_{M-b}^{m-k}}{A_M^m}$$

(où $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ désigne le nombre d'arrangements de k éléments parmi n et $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ le nombre de combinaisons de k éléments parmi n) et $\mathbb{E}[S_m] = \sum_{k=1}^m \mathbb{E}[B_k] = \sum_{k=1}^m \frac{b}{M} = \frac{mb}{M}$.

4. On a $\mathrm{Var}(B_k) = \mathbb{E}[B_k^2] - \mathbb{E}[B_k]^2 = \mathbb{P}(B_k = 1) - \mathbb{E}[B_k]^2 = \frac{b}{M}\left(1 - \frac{b}{M}\right)$.
Pour $1 \le k, \ell \le m$, $k \neq \ell$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(B_k, B_\ell) &= \mathbb{E}[B_k B_\ell] - \mathbb{E}[B_k]\mathbb{E}[B_\ell] = \sum_{i,j \in \{0,1\}} ij\mathbb{P}(B_k = i, B_\ell = j) - \mathbb{E}[B_k]\mathbb{E}[B_\ell] \\ &= \mathbb{P}(B_k = 1, B_\ell = 1) - \mathbb{E}[B_k]\mathbb{E}[B_\ell] = \frac{b(b-1)}{M(M-1)} - \frac{b^2}{M^2} = \frac{b}{M}\left(\frac{b-1}{M-1} - \frac{b}{M}\right).\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(S_m) &= \mathrm{Var}\left(\sum_{k=1}^m B_k\right) = \sum_{k=1}^m \mathrm{Var}(B_k) + 2\sum_{1 \le k < \ell \le m} \mathrm{Cov}(B_k, B_\ell) \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{b}{M}\left(1 - \frac{b}{M}\right) + 2\sum_{1 \le k < \ell \le m} \frac{b}{M}\left(\frac{b-1}{M-1} - \frac{b}{M}\right) \\ &= \frac{mb}{M}\left(1 - \frac{b}{M}\right) + \frac{m(m-1)b}{M}\left(\frac{b-1}{M-1} - \frac{b}{M}\right) = \frac{mb}{M}\left(1 - \frac{b}{M} + (m-1)\left(\frac{b-1}{M-1} - \frac{b}{M}\right)\right).\end{aligned}$$

Exercice 4. 1. La loi de M est donnée par $\mathbb{P}(M = k) = \mathbb{P}(M \ge k) - \mathbb{P}(M \ge k+1)$, $k \in \mathbb{N}$. Or

$$\mathbb{P}(M \ge k) = \mathbb{P}(U \ge k, V \ge k) = \mathbb{P}(U \ge k)\mathbb{P}(V \ge k)$$

et

$$\mathbb{P}(U \ge k) = \mathbb{P}(V \ge k) = \sum_{j \ge k} \mathbb{P}(U = j) = \sum_{j \ge k} p(1-p)^j = p(1-p)^k \sum_{j \ge 0}(1-p)^j = (1-p)^k.$$

D'où $\mathbb{P}(M \ge k) = (1-p)^{2k}$ et

$$\mathbb{P}(M = k) = \mathbb{P}(M \ge k) - \mathbb{P}(M \ge k+1) = (1-p)^{2k} - (1-p)^{2k+2} = (1-p)^{2k}(1-(1-p^2)) = p(2-p)(1-p)^{2k}.$$

2. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{Z}$,

$$\mathbb{P}(M = k,\ W = r) = \mathbb{P}(\min(U, V) = k, V - U = r) = \begin{cases}\mathbb{P}(U = k, V - U = r) & \text{si } r \ge 0 \\ \mathbb{P}(V = k, V - U = r) & \text{si } r < 0\end{cases}.$$

Donc, si $r \ge 0$,

$$\mathbb{P}(M = k,\ W = r) = \mathbb{P}(U = k, V = r + k) = \mathbb{P}(U = k)\mathbb{P}(V = r + k) = p^2(1-p)^{2k+r}$$

et si $r < 0$,

$$\mathbb{P}(M = k,\ W = r) = \mathbb{P}(V = k, U = k - r) = \mathbb{P}(V = k)\mathbb{P}(U = k - r) = p^2(1-p)^{2k-r}.$$

On obtient finalement pour $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{P}(M = k,\ W = r) = p^2(1-p)^{2k+|r|}$.

3. La loi de W est donnée, pour $r \in \mathbb{Z}$, par

$$\mathbb{P}(W = r) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(M = k,\ W = r) = \sum_{k \in \mathbb{N}} p^2(1-p)^{2k+|r|} = \frac{p(1-p)^{|r|}}{2-p}.$$

On voit alors que, pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{P}(M = k,\ W = r) = \mathbb{P}(M \ge k)\mathbb{P}(W = r)$ donc M et W sont indépendantes.

Exercice 5. 1. Par définition, la fonction génératrice de S est, pour $s \in [0,1]$,

$$G_S(s) = \mathbb{E}[s^S] = s^0 \mathbb{P}(N=0) + \sum_{k\geq 1} \mathbb{E}\left[s^{\sum_{i=1}^k X_i} \mathbb{1}_{\{N=k\}}\right].$$

Puisque N et la suite (X_i) sont indépendantes, on a

$$G_S(s) = \mathbb{P}(N=0) + \sum_{k\geq 1} \mathbb{E}\left[s^{\sum_{i=1}^k X_i}\right] \mathbb{P}(N=k).$$

Enfin, puisque les X_i sont indépendantes et de même loi, on a

$$\mathbb{E}\left[s^{\sum_{i=1}^k X_i}\right] = \prod_{i=1}^k G_{X_i}(s) = \big(G_{X_1}(s)\big)^k.$$

Ceci vaut 1 pour $k=0$. Donc

$$G_S(s) = \sum_{k\geq 0} \big(G_{X_1}(s)\big)^k \mathbb{P}(N=k) = G_N\big(G_{X_1}(s)\big) = G_N \circ G_{X_1}(s).$$

De plus, $G_{X_1}(s) = 1-p+ps$.
On a $\mathbb{E}[S] = G'_S(1)$ et $\mathrm{Var}(S) = G''_S(1) + G'_S(s) - G'_S(s)^2$. Or, $G'_S(s) = G'_N\big(G_{X_1}(s)\big)G'_{X_1}(s)$ et

$$G''_S(s) = G'_N\big(G_{X_1}(s)\big)G''_{X_1}(s) + G''_N\big(G_{X_1}(s)\big)\big(G'_{X_1}(s)\big)^2.$$

Donc $\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[X_1]$ car $G_{X_1}(1) = 1$, $\mathbb{E}[S^2] = \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[X_1(X_1-1)] + \mathbb{E}[N^2]\mathbb{E}[X_1]^2$, d'où $\mathrm{Var}(S) = \mathbb{E}[N]\mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(N)\mathbb{E}[X_1]^2$.

2. (a) Si $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$, alors la fonction génératrice de N est $G_N(s) = e^{\lambda(s-1)}$, $s \in [0,1]$, et celle de S est $G_S(s) = G_N \circ G_{X_1}(s) = e^{\lambda p(s-1)}$. Donc S suit une loi de Poisson de paramètre λp.

   (b) On remarque que T est la somme arrêtée en N de v.a. i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre $1-p$, donc T suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda(1-p)$. On a donc pour $j,k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(S=k) = \frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda p}$, $\mathbb{P}(T=j) = \frac{(\lambda(1-p))^j}{j!}e^{-\lambda(1-p)}$ et

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S=k, T=j) &= \mathbb{P}(S=k, N=j+k) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^N X_i = k, N=j+k\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{j+k} X_i = k, N=j+k\right) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{j+k} X_i = k\right)\mathbb{P}(N=j+k) \\
&= C_{j+k}^k p^k (1-p)^j \frac{\lambda^{j+k}}{(j+k)!}e^{-\lambda} = \frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda p}\frac{(\lambda(1-p))^j}{j!}e^{-\lambda(1-p)} \\
&= \mathbb{P}(S=k)\mathbb{P}(T=j).
\end{aligned}$$

3. (a) Comme $p = \frac{1}{2}$, S et T ont même loi, à savoir $\mathcal{P}\left(\frac{\lambda}{2}\right)$. Comme $N = S+T$ et que S et T sont indépendantes, on a en utilisant le résultat de la question 1.

$$\forall s \in [0,1], \quad G_N(s) = G_{S+T}(s) = G_S(s)G_T(s) = G_S(s)^2 = G_N\left(\frac{1+s}{2}\right)^2.$$

Par récurrence, en prenant pour cas initial $n = 1$ prouver ci-dessus, et en faisant l'hypothèse que la propriété est satisfaite au rang k, *i.e.* pour tout $s \in [0, 1]$, $G_N(s) = G_N\left(1 + \frac{s-1}{2^k}\right)^{2^k}$, on a au rang $k + 1$

$$G_N(s) = G_N\left(1 + \frac{s-1}{2^k}\right)^{2^k} = \left(G_N\left(\frac{1 + 1 + \frac{s-1}{2^k}}{2}\right)^2\right)^{2^k} = G_N\left(1 + \frac{s-1}{2^{k+1}}\right)^{2^{k+1}}.$$

La propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) En effectuant un développement limité de G_N, à $s \in [0, 1]$ fixé, quand n tend vers $+\infty$, on a

$$\begin{aligned} G_N(s) &= G_N\left(1 + \frac{s-1}{2^n}\right)^{2^n} = \left(G_N(1) + \frac{s-1}{2^n} G_N'(1) + o\left(\frac{s-1}{2^n}\right)\right)^{2^n} \\ &= \left(1 + \frac{s-1}{2^n} c + o\left(\frac{s-1}{2^n}\right)\right)^{2^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{c(s-1)} \end{aligned}$$

en utilisant que $e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$. Donc N suit une loi de Poisson de paramètre c.