MAT431 Equations différentielles

Raphaël KRIKORIAN

9 octobre, 2012

Sommaire du cours 8

1. Plan cours 8
2. Redressement des flots
3. Point fixe hyperbolique

Plan du cours 8

1. Redressement des flots
2. Point fixe hyperbolique
   - Définition
   - Variétés stable/instable
   - Théorème de Hartman-Grobman

Plan du cours 8

Lire :

- Pour le théorème de redressement des flots : chapitre 5 de [V], sections 1, 3 et 4.

Remarque :

(1) Les transparents et l'énoncé du devoir (ainsi que leurs versions révisées) sont disponibles à l'adresse : http ://www.mathematiques.polytechnique.edu/accueil/enseignement/cycle-polytechnicien/annee-2/support-pedagogique-mat-431-7583.kjsp ?RH=1254312611509

Sommaire du cours 8

1 Plan cours 8

2 Redressement des flots

3 Point fixe hyperbolique

Conjugaison des champs de vecteurs

Problème : Etant donné un champ de X (qu'on suppose complet pour simplifier) sur $\mathbb{R}^n$ (ou un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$) trouver de nouvelles coordonnées dans lesquelles ce champ de vecteurs prenne une expression "plus simple".
Soit $x(\cdot)$ solution de $\dot{x} = X(x)$, $x(0) = x_0$ et $f : \Omega \to \Omega$ un difféomorphisme de classe C^k, $k \geqslant 1$.
Quelle est l'équation différentielle satisfaite par $y(\cdot) = f(x(\cdot))$?

Conjugaison des champs de vecteurs

On a

$$\begin{aligned}\dot{y}(t) &= \frac{d}{dt}(f(x(t)) \\ &= Df(x(t)) \cdot \dot{x}(t) \\ &= Df(x(t)) \cdot X(x(t)) \\ &= Df(f^{-1}(y(t)) \cdot X(f^{-1}(y(t))\end{aligned}$$

et donc

$$\dot{y}(t) = Y(y(t)), \qquad y(0) = f(x(0)),$$

où $Y(\cdot)$ vérifie

$$Y(f(x)) = Df(x) \cdot X(x).$$

On note $Y = f_* X$

Conjugaison des champs de vecteurs

Remarquons que de façon équivalente si f est de classe C^k, $k \geqslant 1$

$$Y = f_* X \quad \Longleftrightarrow \quad \phi_Y^t = f \circ \phi_X^t \circ f^{-1}.$$

Remarque importante : Si f est seulement continue, la relation de conjugaison entre les flots a un sens tandis que celle entre les champs de vecteurs n'en a pas. On dit que les flots de X et de Y sont topologiquement conjugués.

Redressement des flots

Théorème

Si X est de classe C^k ($k \geqslant 1$) et si $X(x_0) \neq 0$ il existe un difféomorphisme h de classe C^k défini au voisinage de x_0 tel que

$$h_* X \equiv e_1$$

où e_1 est le champ de vecteurs constant égal à $(1, 0, \dots, 0)$.

Démonstration

On note Σ une transversale à $X(x_0)$ en x_0 et on considère $\psi : \mathbb{R} \times \Sigma \to \mathbb{R}$ l'application à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, définie au voisinage de $(0, x_0) \in \mathbb{R} \times \Sigma$ par $\psi(t, u) = \phi_X^t(u)$. On a déjà calculé $D\psi(0, x_0)$: $D\psi(0, x_0) \cdot e_1 = X(x_0)$ et $D\psi(0, x_0)_{|\Sigma} = D\phi^0_{X|\Sigma}(x_0) = DId_{|\Sigma} = Id$; donc, $D\psi(0, x_0)$ est inversible.

Redressement des flots

Le théorème d'inversion locale définit un difféomorphisme d'un voisinage de $(0, x_0) \in \mathbb{R} \times \Sigma$ sur un voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Si on note $L : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R} \times \Sigma$ l'application affine qui envoie $(0, 0)$ sur $(0, x_0)$, e_1 sur X_0 et $(e_2, \dots, e_n)$ sur une base de Σ, l'application $h := \psi \circ L$ est un difféomorphisme d'un voisinage de $(0, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ sur un voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}^n$.
Comme $\phi_{e_1}^t(s, y) = (s + t, \tilde{y})$ on a
$h \circ \phi_{e_1}^t(s, y) = h(s + t, \tilde{y}) = \phi_X^{s+t}(\tilde{y}) = \phi_X^t(\phi_X^s(\tilde{y})) = \phi_X^t(h(s, y))$. □

Sommaire du cours 8

1 Plan cours 8

2 Redressement des flots

3 Point fixe hyperbolique
- Définition
- Variétés stable/instable
- Théorème de Hartman-Grobman

Point fixe hyperbolique
Problème

Nous nous proposons d'étudier la dynamique d'un champ de vecteurs $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ au voisinage d'un point x_0. Pour simplifier nous supposons le champ X complet.

- (i) Si x_0 est un point régulier de X ($X(x_0) \neq 0$) nous avons vu qu'il existait un voisinage $U \ni x_0$ et un difféomorphisme local $\varphi : U \to \varphi(U)$ tels que dans les nouvelles coordonnées données par φ le champ X devienne constant : $Y = \varphi_* X$ est un champ constant.
- (ii) Que peut-on dire au voisinage d'un point singulier x_0 (i.e. si $X(x_0) = 0$) ?

Dans le cas (ii), on ne peut en général pas donner une description complète de la dynamique sauf dans un cas important : quand x_0 est un point singulier hyperbolique.

Point fixe hyperbolique
Définition

Définition

On dit que x_0 est un point fixe hyperbolique de X si aucune des valeurs propres de $DX(x_0)$ n'est de partie réelle nulle.

On peut alors définir les espaces stable et instable ($\lambda \in Spec(DX(x_0))$:

$$\Gamma_s(x_0) = \bigoplus_{\Re\lambda<0} \Gamma_\lambda(DX(x_0)), \qquad \Gamma_u(x_0) = \bigoplus_{\Re\lambda>0} \Gamma_\lambda(DX(x_0))$$

$$\mathbb{R}^n = \Gamma_s \oplus \Gamma_u.$$

Point fixe hyperbolique
Exemple

Exemple : Le point $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ est un point fixe hyperbolique du champ de vecteurs :

$$\begin{cases} x' &= 2x + y + x^2 + y^3 \\ y' &= x + y + x^3 y^5. \end{cases} \tag{1}$$

Déterminer Γ_s et Γ_u.

Point fixe hyperbolique

Le problème qui nous intéresse est le suivant : dans quelle mesure la dynamique de $\dot{x}(t) = X(x(t))$ au voisinage de x_0 est-elle semblable à celle $\dot{x}(t) = DX(x_0) \cdot x(t)$?

- (i) Existe-t-il des solutions asymptotiquement stables (en $\pm\infty$) ?
- (ii) Est-il possible de conjuguer $X(\cdot)$ à sa partie linéaire $DX(x_0)$?

On peut reformuler la première question de la façon suivante.
Les espaces $\Gamma_{s,u}$ sont caractérisés de façon dynamique.
Γ_s (resp. Γ_u) est l'ensemble des conditions initiales v pour lesquels les solutions de $\dot{x}(t) = DX(x_0) \cdot x(t)$, $x(0) = v$ convergent vers 0 quand $t \to \infty$ (resp. $t \to -\infty$).
Existe-t-il des ensembles remarquables semblables dans le cas non-linéaire ?

Définition

Soit $\delta > 0$. Nous appelerons variété stable (resp. instable) locale de x_0 l'ensemble $W^s_\delta(x_0)$ (resp. $W^u_\delta(x_0)$) des $x \in B(x_0, \delta)$ pour lesquels, pour tout $t \geqslant 0$ (resp. $t \leqslant 0$)

$$\phi^t_F(x) \in B(x_0, \delta).$$

Remarque : Il n'est pas du tout clair à ce stade que ces ensembles soient non-vides et soient des (sous-)variétés.

Théorème (de la variété stable)

Soit $x_0 = 0$ un point fixe hyperbolique d'un champ de vecteurs X de classe C^k ($k \geqslant 1$) et tel que $\Gamma_s \neq \{0\}$ (resp. $\Gamma_u \neq \{0\}$)

- *i) Il existe alors un $\delta > 0$ et une application w_s (resp. w_u) de classe C^k d'un voisinage V_s (resp. V_u) de $0 \in \Gamma_s$ (resp. Γ_u) dans un voisinage de $0 \in \Gamma_u$ (resp. de $0 \in \Gamma_s$) tels que $W^s_\delta(0)$ (resp. $W^u_\delta(x_0)$) est le graphe de l'application w_s (resp. w_u) :*

$$W^*_\delta(x_0) = \{x_* + w_*(x_*), x_* \in V_*\}, \quad * = s, u.$$

  En outre $T_{x_0} W^*_\delta = \Gamma_*$.
- *ii) Pour tout $x \in W^s_\delta(x_0)$ et tout $0 \leqslant \rho < \tilde{\rho} := \min_{\lambda \in Spec(DX(x_0))}(|\Re\lambda|)$ on a*

$$\lim_{t \to \infty} e^{\rho t} \|\phi^t_X(x)\| = 0.$$

Ce théorème garantit donc, dans le cas hyperbolique, la non vacuité des variétés stable et instable (pourvu que E_s, E_u soient non vides) et montre que la stabilité topologique d'une orbite entraîne sa stabilité asymptotique.

Deuxième problème : la conjugaison à la partie linéaire :
En général, on ne peut pas conjuguer X à sa partie linéaire par un difféomorphisme C^1.
En revanche, on peut conjuguer par un homéomorphisme, les flots de $X(\cdot)$ et de $DX(x_0)$.

Théorème (Hartman-Grobmann)

Si x_0 est un point fixe hyperbolique de $X(\cdot)$ alors il existe un voisinage U de x_0 et un homéomorphisme h de U sur son image qui conjugue les flots de $X(\cdot)$ et de $DX(x_0)$: partout où ceci a un sens

$$h \circ \phi_X^t(x) = e^{tDX(x_0)} \cdot h(x).$$