MAT431 Equations différentielles

Raphaël KRIKORIAN

11 septembre, 2012

Plan du cours 4

1. La résonance paramétrique
   - Cas de la dimension 2
   - Résonance paramétrique
2. Temps de vie des solutions
   - Intervalle maximal
   - Estimation du temps de vie : critères géométrique et analytique
3. O.D.E. non-linéaires : linéarisation et théorie des perturbations
   - Théorèmes de dépendance différentiable
   - Dépendance différentiable, Linéarisation
   - Dépendance différentiable, Linéarisation
   - Théorie des perturbations

Lire :

- Pour la résonance paramétrique : chapitre 3 de [V] sections 2, 3, 4.
- Pour le temps de vie des solutions : chapitre 4 de [V], sections 2, 3, 4.
- Pour la théorie des perturbations non-linéaires : chapitre 2, Théorème 2.3 et chapitre 5, section 2.

Remarque : Les transparents, feuilles de PC et listes d'errata sont disponibles aux adresses :

- http ://www.mathematiques.polytechnique.edu/accueil/enseignement/cycle-polytechnicien/annee-2/support-pedagogique-mat-431-7583.kjsp ?RH=1254312611509
- http ://www.proba.jussieu.fr/dw/doku.php ?id=users :krikorian :mat431_2012-13

Sommaire du cours 4

1. La résonance paramétrique
   - Cas de la dimension 2
   - Résonance paramétrique
2. Temps de vie des solutions
3. O.D.E. non-linéaires : linéarisation et théorie des perturbations

$A_\epsilon(\cdot)$ dépend continûment (ou C^k) d'un paramètre $\epsilon \in (-\epsilon_0, \epsilon_0)$,

$$X'(t) = A_\epsilon(t)X(t), \qquad A_\epsilon(\cdot + T) = A_\epsilon(\cdot)$$

$A_\epsilon(\cdot)$ dépend continûment (ou C^k) d'un paramètre $\epsilon \in (-\epsilon_0, \epsilon_0)$,

$$X'(t) = A_\epsilon(t)X(t), \qquad A_\epsilon(\cdot + T) = A_\epsilon(\cdot)$$

- 0 est asymptotiquement stable en $t \to \infty$ pour $\epsilon = 0$.

$A_\epsilon(\cdot)$ dépend continûment (ou C^k) d'un paramètre $\epsilon \in (-\epsilon_0, \epsilon_0)$,

$$X'(t) = A_\epsilon(t)X(t), \qquad A_\epsilon(\cdot + T) = A_\epsilon(\cdot)$$

- 0 est asymptotiquement stable en $t \to \infty$ pour $\epsilon = 0$.
- $\iff \forall \rho \in vp(R_{\epsilon=0}(T, 0)),\ |\rho| < 1$

$A_\epsilon(\cdot)$ dépend continûment (ou C^k) d'un paramètre $\epsilon \in (-\epsilon_0, \epsilon_0)$,

$$X'(t) = A_\epsilon(t)X(t), \qquad A_\epsilon(\cdot + T) = A_\epsilon(\cdot)$$

- 0 est asymptotiquement stable en $t \to \infty$ pour $\epsilon = 0$.
- $\iff \forall \rho \in vp(R_{\epsilon=0}(T,0)),\ |\rho| < 1$
- $\iff \forall \lambda \in vp(A^0_\epsilon),\ Re(\lambda) < 0$, où $e^{TA^0_\epsilon} = R_\epsilon(T,0)$.

$A_\epsilon(\cdot)$ dépend continûment (ou C^k) d'un paramètre $\epsilon \in (-\epsilon_0, \epsilon_0)$,

$$X'(t) = A_\epsilon(t)X(t), \qquad A_\epsilon(\cdot + T) = A_\epsilon(\cdot)$$

- 0 est asymptotiquement stable en $t \to \infty$ pour $\epsilon = 0$.
- $\iff \forall \rho \in vp(R_{\epsilon=0}(T,0)),\ |\rho| < 1$
- $\iff \forall \lambda \in vp(A_\epsilon^0),\ Re(\lambda) < 0$, où $e^{TA_\epsilon^0} = R_\epsilon(T,0)$.

Proposition

La propriété "être asymptotiquement stable" est robuste c'est-à-dire ouverte dans l'espace des paramètres.

Qu'en est-il de la stabilité ? :

Qu'en est-il de la stabilité ? : En général, on ne peut rien dire.

Qu'en est-il de la stabilité ? : En général, on ne peut rien dire.
Mais, en Physique, conservation énergie $\Longrightarrow$ structure supplémentaire ("hamiltonienne", " symplectique").

Qu'en est-il de la stabilité ? : En général, on ne peut rien dire.
Mais, en Physique, conservation énergie $\Longrightarrow$ structure supplémentaire ("hamiltonienne", " symplectique").
En dimension 2 : importance des systèmes $X'(t) = A(t)X(t)$ où
$A : \mathbb{R} \to sl(2, \mathbb{R})$: matrices 2×2 à coefficients réels et de trace nulle

Qu'en est-il de la stabilité ? : En général, on ne peut rien dire.
Mais, en Physique, conservation énergie $\Longrightarrow$ structure supplémentaire (“hamiltonienne”, “ symplectique”).
En dimension 2 : importance des systèmes $X'(t) = A(t)X(t)$ où $A : \mathbb{R} \to sl(2, \mathbb{R})$: matrices 2×2 à coefficients réels et de trace nulle
$\Longrightarrow R(T, 0)$ de déterminant 1 : $R(T, 0) \in SL(2, \mathbb{R})$.

"Rappels" sur $SL(2,\mathbb{R})$

"Rappels" sur $SL(2,\mathbb{R})$
Les v.p. de $R \in SL(2,\mathbb{R})$ sont racines de $\rho^2 - \mathrm{tr}(R)\rho + 1 = 0$.

"Rappels" sur $SL(2,\mathbb{R})$

Les v.p. de $R \in SL(2,\mathbb{R})$ sont racines de $\rho^2 - \mathrm{tr}(R)\rho + 1 = 0$.

- $|tr(R)| > 2 \Longrightarrow$ v.p. de R sont $\{\lambda, 1/\lambda\}$, $\lambda > 0$: hyperbolique

"Rappels" sur $SL(2,\mathbb{R})$
Les v.p. de $R \in SL(2,\mathbb{R})$ sont racines de $\rho^2 - \mathrm{tr}(R)\rho + 1 = 0$.

- $|tr(R)| > 2 \Longrightarrow$ v.p. de R sont $\{\lambda, 1/\lambda\}$, $\lambda > 0$: hyperbolique
- $|tr(R)| < 2 \Longrightarrow$ v.p. de R sont $\{e^{i\alpha}, e^{-i\alpha}\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$: elliptique

"Rappels" sur $SL(2,\mathbb{R})$
Les v.p. de $R \in SL(2,\mathbb{R})$ sont racines de $\rho^2 - \mathrm{tr}(R)\rho + 1 = 0$.

- $|tr(R)| > 2 \Longrightarrow$ v.p. de R sont $\{\lambda, 1/\lambda\}$, $\lambda > 0$: hyperbolique
- $|tr(R)| < 2 \Longrightarrow$ v.p. de R sont $\{e^{i\alpha}, e^{-i\alpha}\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$: elliptique
- $|tr(R)| = 2 \Longrightarrow$ v.p. de R sont (1,1) ou $(-1,-1)$: parabolique.

Comme $R_A(T,0) = e^{TA}$ ou $R_A(T,0)^2 = e^{2TA}$ on a donc

Théorème

Le système $X'(t) = A(t)X(t)$ *avec* $A(\cdot + T) = A(\cdot)$, $A(\cdot)$ *à valeurs dans* $sl(2,\mathbb{R})$, *est*

Comme $R_A(T,0) = e^{TA}$ ou $R_A(T,0)^2 = e^{2TA}$ on a donc

Théorème

Le système $X'(t) = A(t)X(t)$ avec $A(\cdot + T) = A(\cdot)$, $A(\cdot)$ à valeurs dans $sl(2,\mathbb{R})$, est

- *stable* $\Longleftrightarrow$ *elliptique* $|tr(R_A(T,0)| < 2$ *ou si* $R_A(T,0) = \pm I$.

Comme $R_A(T,0) = e^{TA}$ ou $R_A(T,0)^2 = e^{2TA}$ on a donc

Théorème

Le système $X'(t) = A(t)X(t)$ avec $A(\cdot + T) = A(\cdot)$, $A(\cdot)$ à valeurs dans $sl(2,\mathbb{R})$, est

- *stable* $\Longleftrightarrow$ *elliptique* $|tr(R_A(T,0)| < 2$ *ou si* $R_A(T,0) = \pm I$.
- *instable* $\Longleftrightarrow$ *hyperbolique* $|tr(R_A(T,0)| > 2$ *ou* $|tr(R_A(T,0))| = 2$ *parabolique* $\neq \pm I$.

La nouveauté dans le cas où $A(\cdot)$ est à valeurs dans $sl(2, \mathbb{R})$: est

Théorème

L'ensemble des matrices elliptiques de $SL(2, \mathbb{R})$ est ouvert dans $SL(2, \mathbb{R})$.

La nouveauté dans le cas où $A(\cdot)$ est à valeurs dans $sl(2,\mathbb{R})$: est

Théorème

L'ensemble des matrices elliptiques de $SL(2,\mathbb{R})$ est ouvert dans $SL(2,\mathbb{R})$.

On a donc par le théorème de dépendance continue par rapport aux paramètres :

Corollaire

L'ensemble des $A \in C^0_{T-per}(\mathbb{R}, sl(2,\mathbb{R}))$ pour lesquels $X'(t) = A(t)X(t)$ est elliptique est ouvert (dans $C^0_{T-per}(\mathbb{R}, sl(2,\mathbb{R}))$).

Conséquences pour
$A_\epsilon(\cdot) = A + \epsilon F(\cdot), \quad A = cste, \quad F(\cdot + T) = F(\cdot) \qquad (PP)_\epsilon$:

Conséquences pour

$A_\epsilon(\cdot) = A + \epsilon F(\cdot), \quad A = cste, \quad F(\cdot + T) = F(\cdot) \qquad (PP)_\epsilon$:

- Si $e^{TA} \in SL(2, \mathbb{R})$ est hyperbolique ($|\mathrm{tr}(e^{TA})| > 2$), l'origine reste un point d'équilibre instable du système $(PP)_\epsilon$ pour ϵ assez petit.

Conséquences pour
$A_\epsilon(\cdot) = A + \epsilon F(\cdot), \quad A = cste, \quad F(\cdot + T) = F(\cdot) \qquad (PP)_\epsilon$:

- Si $e^{TA} \in SL(2, \mathbb{R})$ est hyperbolique ($|\mathrm{tr}(e^{TA})| > 2$), l'origine reste un point d'équilibre instable du système $(PP)_\epsilon$ pour ϵ assez petit.
- Si $e^{TA} \in SL(2, \mathbb{R})$ est elliptique ($|\mathrm{tr}(e^{TA})| < 2$), l'origine reste un point d'équilibre stable du système $(PP)_\epsilon$ pour ϵ assez petit.

Conséquences pour
$A_\epsilon(\cdot) = A + \epsilon F(\cdot), \quad A = cste, \quad F(\cdot + T) = F(\cdot) \qquad (PP)_\epsilon$:

- Si $e^{TA} \in SL(2, \mathbb{R})$ est hyperbolique ($|\mathrm{tr}(e^{TA})| > 2$), l'origine reste un point d'équilibre instable du système $(PP)_\epsilon$ pour ϵ assez petit.
- Si $e^{TA} \in SL(2, \mathbb{R})$ est elliptique ($|\mathrm{tr}(e^{TA})| < 2$), l'origine reste un point d'équilibre stable du système $(PP)_\epsilon$ pour ϵ assez petit.
- Si $e^{TA} \in SL(2, \mathbb{R})$ est parabolique ($|\mathrm{tr}(e^{TA})| < 2$) : tout peut arriver !

Considérons

$$\ddot{x}(t) + (a + \epsilon \cos(\frac{2\pi t}{T})x(t) = 0,$$

qui se récrit

$$\dot{X}(t) = (A + \epsilon F(t))X(t)$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 0 \end{pmatrix}, \qquad F(t) = \epsilon \cos(\frac{2\pi t}{T}) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si $a > 0$ on écrit $a = \omega^2$ et on a

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos(t\omega) & \frac{\sin(t\omega)}{\omega} \\ -\omega \sin(t\omega) & \cos(t\omega) \end{pmatrix}$$

Donc

Proposition (Résonance paramétrique)

$$e^{TA} \text{ elliptique} \iff |tr(e^{TA})| < 2 \iff \omega \notin \frac{\pi}{T}\mathbb{Z}$$

et dans ce cas il existe $\epsilon_\omega > 0$ tel que pour tout $\epsilon \in (-\epsilon_\omega, \epsilon_\omega)$ le système associé à $A + \epsilon F(\cdot)$ est stable.

En revanche, si $\omega = \omega_k := k\frac{\pi}{T}$ (on dit que le système est résonant), la méthode des perturbations, permet de calculer le développement limité de $R_{A_\epsilon}(T, 0)$ et donc de sa trace et de montrer qu'il existe dans le plan (ω, ϵ) une zone d'instabilité d'intérieur non vide dont l'adhérence contient $(\omega_k, 0)$.

Pour $\ddot{x} + (a + \epsilon \cos(2t))x = 0$ ($T = \pi$, $a = \omega^2$ si $a > 0$).
Rouge : instable (hyperbolique) Bleu : parabolique Orange : stable (elliptique)

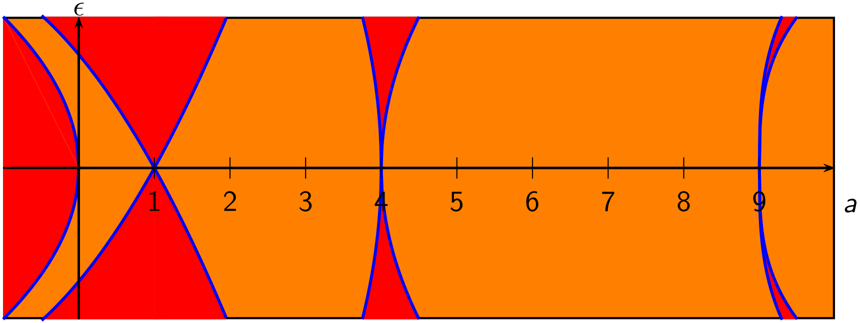

Figure: Zones de stabilité-instabilité

- Pendule de Kapitsa : pendule inversé dont le point d'attache oscille périodiquement (oscillations de faible amplitude mais rapides) ; après changement de variables on peut se trouver dans une zone de stabilité $a < 0$ et ϵ petits.

- Pendule de Kapitsa : pendule inversé dont le point d'attache oscille périodiquement (oscillations de faible amplitude mais rapides) ; après changement de variables on peut se trouver dans une zone de stabilité $a < 0$ et ϵ petits.
- Piégeage des ions (Nobel 1989, Dehmelt, Paul) : Dans un champ électrique (quadrupôle) oscillant : même principe que le pendule de Kapitsa.

- Pendule de Kapitsa : pendule inversé dont le point d'attache oscille périodiquement (oscillations de faible amplitude mais rapides) ; après changement de variables on peut se trouver dans une zone de stabilité $a < 0$ et ϵ petits.
- Piégeage des ions (Nobel 1989, Dehmelt, Paul) : Dans un champ électrique (quadrupôle) oscillant : même principe que le pendule de Kapitsa.
- Propriétés métal-isolant (physique du solide) : Equation stationnaire de Schrödinger 1D, potentiel périodique. $-\psi''(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$. Les solutions physiquement acceptables sont celles pour lesquelles ψ est bornée. Le spectre de l'opérateur associé a une structure de bandes.

Sommaire du cours 4

1. La résonance paramétrique
2. Temps de vie des solutions
   - Intervalle maximal
   - Estimation du temps de vie : critères géométrique et analytique
3. O.D.E. non-linéaires : linéarisation et théorie des perturbations

Problème : $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ cont. loc. lip.(en y), $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ouvert et $y(\cdot)$ sol. de

$$\begin{cases} \dot{y}(t) & = f(t, y(t)) \\ y(t_0) & = y_0 \end{cases} \qquad (*)$$

sur un intervalle I,

Problème : $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ cont. loc. lip.(en y), $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ouvert et $y(\cdot)$ sol. de

$$\begin{cases} \dot{y}(t) & = f(t, y(t)) \\ y(t_0) & = y_0 \end{cases} \qquad (*)$$

sur un intervalle I,
Est-il possible de la prolonger en une solution définie sur un intervalle plus grand ?

Problème : $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ cont. loc. lip.(en y), $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ouvert et $y(\cdot)$ sol. de

$$\begin{cases} \dot{y}(t) & = f(t, y(t)) \\ y(t_0) & = y_0 \end{cases} \tag{$*$}$$

sur un intervalle I,
Est-il possible de la prolonger en une solution définie sur un intervalle plus grand ?
Notation (y, I) : sol. de $y' = f(t, y)$ sur l'intervalle ouvert I.

Proposition (Recollement des solutions)

(y_1, I_1), (y_2, I_2) sol. de $(*)$.

$$\exists t_0 \in I_1 \cap I_2,\ y_1(t_0) = y_2(t_0) \Longrightarrow \forall t \in I_1 \cap I_2,\ y_1(t) = y_2(t).$$

La fonction $y : I_1 \cup I_2 \to E : y|I_1 = y_1,\ y|I_2 = y_2$ est C^1 et solution de $(*)$ sur $I_1 \cup I_2$. On dit que $(y, I_1 \cup I_2)$ recolle (y_1, I_1) et (y_2, I_2).

Définition

I_1, I_2 *intervalles ouverts tq* $I_1 \subset I_2$, $I_1 \neq I_2$, *et* y_1, y_2 *deux sol. de* $(*)$ *resp. sur* I_1 *et* I_2. *On dit que* (y_2, I_2) *prolonge* (y_1, I_1) *si* $y_2|I_1 = y_1|I_1$. *Une sol.* (y, I) *de* $(*)$ *est maximale si on ne peut pas la prolonger.*

Définition

I_1, I_2 intervalles ouverts tq $I_1 \subset I_2$, $I_1 \neq I_2$, et y_1, y_2 deux sol. de $(*)$ resp. sur I_1 et I_2. On dit que (y_2, I_2) prolonge (y_1, I_1) si $y_2|I_1 = y_1|I_1$. Une sol. (y, I) de $(*)$ est maximale si on ne peut pas la prolonger.

On peut alors énoncer,

Proposition

Toute sol. (y, I) de $(*)$ peut être prolongée en une unique solution maximale.

Définition

I_1, I_2 intervalles ouverts tq $I_1 \subset I_2$, $I_1 \neq I_2$, et y_1, y_2 deux sol. de $(*)$ resp. sur I_1 et I_2. On dit que (y_2, I_2) prolonge (y_1, I_1) si $y_2|I_1 = y_1|I_1$. Une sol. (y, I) de $(*)$ est maximale si on ne peut pas la prolonger.

On peut alors énoncer,

Proposition

Toute sol. (y, I) de $(*)$ peut être prolongée en une unique solution maximale.

Démonstration : L'intervalle maximal est l'union de tous les intervalles I contenant y_0 pour lesquels (y, I) est solution de $(*)$. □

Remarque. Si $\Omega = I \times E$ et si $\forall (t_0, v_0) \in \Omega$ $\exists!$ sol. y_{t_0,v_0} maximale sur I tout entier, on dit que l'équation est complète.

Remarque. Si $\Omega = I \times E$ et si $\forall (t_0, v_0) \in \Omega \; \exists!$ sol. y_{t_0,v_0} maximale sur I tout entier, on dit que l'équation est complète.
Exemple d'explosion en temps fini. $\dot{x} = x^2$, $x(t_0) = x_0$;

Remarque. Si $\Omega = I \times E$ et si $\forall (t_0, v_0) \in \Omega\ \exists!$ sol. y_{t_0,v_0} maximale sur I tout entier, on dit que l'équation est complète.

Exemple d'explosion en temps fini. $\dot{x} = x^2$, $x(t_0) = x_0$;

Solutions :

$$\frac{1}{t_0 + \frac{1}{x_0} - t}$$

Si $x_0 > 0$; définie uniquement pour $t < t_0 + \frac{1}{x_0}$.

Remarque. Si $\Omega = I \times E$ et si $\forall (t_0, v_0) \in \Omega$ $\exists!$ sol. y_{t_0,v_0} maximale sur I tout entier, on dit que l'équation est complète.

Exemple d'explosion en temps fini. $\dot{x} = x^2$, $x(t_0) = x_0$;

Solutions :

$$\frac{1}{t_0 + \frac{1}{x_0} - t}$$

Si $x_0 > 0$; définie uniquement pour $t < t_0 + \frac{1}{x_0}$.

Exemple de solutions maximales. $\dot{x} = 1 + x^2$;

Remarque. Si $\Omega = I \times E$ et si $\forall(t_0, v_0) \in \Omega\ \exists!$ sol. y_{t_0,v_0} maximale sur I tout entier, on dit que l'équation est complète.
Exemple d'explosion en temps fini. $\dot{x} = x^2$, $x(t_0) = x_0$;
Solutions :

$$\frac{1}{t_0 + \frac{1}{x_0} - t}$$

Si $x_0 > 0$; définie uniquement pour $t < t_0 + \frac{1}{x_0}$.
Exemple de solutions maximales. $\dot{x} = 1 + x^2$;
Les solutions maximales sont : $(\arctan,]-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}[+k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Considérons donc (y, I) une solution maximale de $(*)$ et supposons $I \neq \mathbb{R}$ de façon que I ait au moins une extrémité finie ; on supposera par exemple $I = (b, a)$. Que se passe-t-il en a, b ?.

Considérons donc (y, I) une solution maximale de $(*)$ et supposons $I \neq \mathbb{R}$ de façon que I ait au moins une extrémité finie ; on supposera par exemple $I = (b, a)$. Que se passe-t-il en a, b ?.

Théorème (Propriété de sortie de tout compact)

(y, I) une sol. maximale, $I \neq \mathbb{R}$, $a \in \partial I \Longrightarrow \forall K \subset \Omega$ compact $\exists t_0 \in I$ t.q. $\forall t \in]t_0, a[$, $y(t) \notin K$.

On dispose de deux types de critères :

On dispose de deux types de critères :

- Critère géométique : Fonctions de Lyapunov

On dispose de deux types de critères :

- Critère géométique : Fonctions de Lyapunov
- Critère analytique : Lemme de Gronwall

Critère géométique : Fonctions de Lyapunov

Critère géométique : Fonctions de Lyapunov

Théorème

Hypothèses :

- $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ C^1, $F := \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x) \leqslant 0\}$,
- $f(t,x)$ *définie sur* $\Omega \supset \mathbb{R} \times F$ *tq*

$$\forall x \in \varphi^{-1}(0), \forall t \in \mathbb{R},\ D\varphi(x) \cdot f(t,x) < 0$$

- $y_0 \in F$, $(y(\cdot), I)$ *est sol. maximale de* $\dot{y} = f(t,y)$, $y(t_0) = y_0$, *alors*

Conclusion : $\forall t \in [t_0, \infty[\cap I,\ y(t) \in F$.

Critère géométique : Fonctions de Lyapunov

Théorème

Hypothèses *:*

- $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ C^1, $F := \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x) \leqslant 0\}$,
- $f(t,x)$ *définie sur* $\Omega \supset \mathbb{R} \times F$ *tq*

$$\forall x \in \varphi^{-1}(0), \forall t \in \mathbb{R},\ D\varphi(x) \cdot f(t,x) < 0$$

- $y_0 \in F$, $(y(\cdot), I)$ *est sol. maximale de* $\dot{y} = f(t,y)$, $y(t_0) = y_0$, *alors*

Conclusion *:* $\forall t \in [t_0, \infty[\cap I,\ \ y(t) \in F.$

Corollaire

En particulier, si F *est compact,* $I \supset [t_0, \infty[$.

- Si $f(t,y) = (-y_1^3 + y_2^2 + 2ty_1, -y_2^5 + 3ty_1^2)$, les solutions sont définies jusqu'en $+\infty$ car pour $|y| \geqslant R$ assez grand et tout t, $\langle y, f(t,y)\rangle \leqslant 0$.

- Si $f(t,y) = (-y_1^3 + y_2^2 + 2ty_1, -y_2^5 + 3ty_1^2)$, les solutions sont définies jusqu'en $+\infty$ car pour $|y| \geqslant R$ assez grand et tout t, $\langle y, f(t,y)\rangle \leqslant 0$.
- L'équation $\ddot{x} = -\nabla V(x) - \gamma\dot{x}$ $(\gamma > 0)$ vérifie le critère précédent avec $\varphi(x,\dot{x}) = E = (1/2)|\dot{x}|^2 + V(x)$. Si les ensembles de niveau sont compacts, les solutions maximales sont définis pour $t \to \infty$.

Critère analytique : Lemme de Gronwall

Critère analytique : Lemme de Gronwall

Théorème

$\rho(\cdot)$ *sol. de* $\dot{\rho}(t) = g(t, \rho(t))$ *définie sur* $[t_0, t_1]$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall t \in [t_0, t_1],\ |y'(t)| \leqslant g(t, |y(t)|) \\ |y(t_0)| \leqslant \rho(t_0) \end{array} \right. \Longrightarrow \forall t \in [t_0, t_1],\ |y(t)| \leqslant \rho(t).$$

Critère analytique : Lemme de Gronwall

Théorème

$\rho(\cdot)$ sol. de $\dot{\rho}(t) = g(t, \rho(t))$ définie sur $[t_0, t_1]$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall t \in [t_0, t_1],\ |y'(t)| \leqslant g(t, |y(t)|) \\ |y(t_0)| \leqslant \rho(t_0) \end{array} \right. \Longrightarrow \forall t \in [t_0, t_1],\ |y(t)| \leqslant \rho(t).$$

Corollaire

Hypothèses :

- $\forall (t, y) \in \Omega$, $|f(t, y)| \leqslant g(t, |y|)$, $|y(t_0)| \leqslant \rho(t_0)$
- *I intervalle maximal de def. de $\dot{\rho}(t) = g(t, \rho(t))$, $\rho(t_0) = \rho_0$*

Conclusion : *l'intervalle maximal de définition de $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$ contient I et on a $\forall t \in I$, $|y(t)| \leqslant \rho(t)$.*

- **Très utile** Si $f(t, y)$ est à croissance affine à l'infini ($\|f(t, y)\| \leqslant a(t)\|y\| + b(t)$), le temps de vie de $(*)$ est infini (si Ω est de la forme $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$).

- **Très utile** Si $f(t, y)$ est à croissance affine à l'infini ($\|f(t, y)\| \leqslant a(t)\|y\| + b(t)$), le temps de vie de $(*)$ est infini (si Ω est de la forme $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$).
- Estimées explicites de la continuité des solutions et de leur temps de vie en fonction du paramètre ou de la condition initiale.

Sommaire du cours 4

1 La résonance paramétrique

2 Temps de vie des solutions

3 O.D.E. non-linéaires : linéarisation et théorie des perturbations
- Théorèmes de dépendance différentiable
- Dépendance différentiable, Linéarisation
- Dépendance différentiable, Linéarisation
- Théorie des perturbations

$f : \Omega \times \Lambda \to E$, $f : (t, y, \lambda) \mapsto f(t, y, \lambda)$ (λ : paramètre) classe C^k.
$(t_0, v_0) \in \Omega$, $\lambda_0 \in \Lambda$.
Problème de Cauchy

$$(P.C.)_{v,\lambda} \quad \begin{cases} y'(t) & = f(t, y(t), \lambda) \\ y(t_0) & = v \end{cases}$$

Hypothèse : $y_0(\cdot) := y_{v_0,\lambda_0}(\cdot)$ solution de $(P.C.)_{v_0\lambda_0}$ sur l'intervalle

(global) $[t_0, t_1]$ (donc sur $[t_0 - \delta, t_1 + \delta]$).

Théorème (Théorème de dépendance différentiable et linéarisation)

- $\exists\ \mathcal{W} \in Vois_{(\lambda_0, v_0)}$, $\forall(\lambda, v) \in \mathcal{W}$, $\exists! y_{\lambda,v}(\cdot)$ *sol. de* $(P.C.)_{\lambda,v}$ *sur* $[t_0, t_1]$
- $(\lambda, v) \mapsto y_{\lambda,v}(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], E)$ *classe* C^k.
- *Dérivée* $(D_{v,\lambda}y)(v_0, \lambda_0) \cdot (\Delta v, \Delta\lambda) = \Delta y(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], E)$ *sol. de l'EDO affine*

$$\iff \begin{cases} (\Delta y)'(t) & = D_y f(t, y_0(t), \lambda_0) \cdot \Delta y(t) + D_\lambda f(t, y_0(t), \lambda_0) \cdot \Delta\lambda \\ \Delta y(t_0) & = \Delta v. \end{cases}$$

Théorème (Théorème de dépendance différentiable et linéarisation)

- $\exists\, \mathcal{W} \in Vois_{(\lambda_0, v_0)}$, $\forall (\lambda, v) \in \mathcal{W}$, $\exists ! y_{\lambda,v}(\cdot)$ *sol. de* $(P.C.)_{\lambda,v}$ *sur* $[t_0, t_1]$
- $(\lambda, v) \mapsto y_{\lambda,v}(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], E)$ *classe* C^k.
- *Dérivée* $(D_{v,\lambda} y)(v_0, \lambda_0) \cdot (\Delta v, \Delta\lambda) = \Delta y(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], E)$ *sol. de l'EDO affine*

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (\Delta y)'(t) & = D_y f(t, y_0(t), \lambda_0) \cdot \Delta y(t) + D_\lambda f(t, y_0(t), \lambda_0) \cdot \Delta\lambda \\ \Delta y(t_0) & = \Delta v. \end{cases}$$

On applique le théorème des fonctions implicites à l'application $\Phi : C^1([t_0, t_1], E) \times E \times \Lambda \to C^1([t_0, t_1], E)$ définie par,

$$\Phi(y(\cdot), v, \lambda) = v + \int_{t_0}^{\cdot} f(s, y(s), \lambda) ds - y(\cdot),$$

Application à la méthode des perturbations

Nous étudions à présent des équations de la forme

$$\dot{y}(t) = f_0(t, y(t)) + \epsilon g(t, y(t))$$

et nous supposons que

- f_0, g sont C^∞ (ou C^k)

Application à la méthode des perturbations

Nous étudions à présent des équations de la forme

$$\dot{y}(t) = f_0(t, y(t)) + \epsilon g(t, y(t))$$

et nous supposons que

- f_0, g sont C^∞ (ou C^k)
- $y_0(\cdot)$ est une solution de

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f_0(t, y(t)) \\ y_0(t_0) = v_0 \end{cases}$$

  sur un intervalle $[t_0, t_1]$.

Application à la méthode des perturbations

Nous étudions à présent des équations de la forme

$$\dot{y}(t) = f_0(t, y(t)) + \epsilon g(t, y(t))$$

et nous supposons que

- f_0, g sont C^∞ (ou C^k)
- $y_0(\cdot)$ est une solution de

  $$\begin{cases} \dot{y}(t) = f_0(t, y(t)) \\ y_0(t_0) = v_0 \end{cases}$$

  sur un intervalle $[t_0, t_1]$.
- ϵ est un petit paramètre, disons réel.

Application à la méthode des perturbations

Théo. de dépendance différentiable $\Longrightarrow \exists\epsilon_0$, $\forall\epsilon \in (-\epsilon_0, \epsilon_0)$ $\exists y(\epsilon, \cdot)$ sol. de

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y}(\epsilon, t) = f_0(t, y(\epsilon, t)) + \epsilon g(t, y(\epsilon, t)) \\ y_0(t_0) = v_0 \end{array} \right.$$

et $y(\epsilon, t)$ C^k en ϵ et en t ;

Application à la méthode des perturbations

Théo. de dépendance différentiable $\Longrightarrow \exists \epsilon_0$, $\forall \epsilon \in (-\epsilon_0, \epsilon_0)$ $\exists y(\epsilon, \cdot)$ sol. de

$$\begin{cases} \dot{y}(\epsilon, t) = f_0(t, y(\epsilon, t)) + \epsilon g(t, y(\epsilon, t)) \\ y_0(t_0) = v_0 \end{cases}$$

et $y(\epsilon, t)$ C^k en ϵ et en t ;
En fait $\epsilon \mapsto y(\epsilon, \cdot)$, $(-\epsilon_0, \epsilon_0) \to C^1([t_0, t_1], E)$ est C^k.

Application à la méthode des perturbations

Théo. de dépendance différentiable $\Longrightarrow \exists \epsilon_0$, $\forall \epsilon \in (-\epsilon_0, \epsilon_0)$ $\exists y(\epsilon, \cdot)$ sol. de

$$\begin{cases} \dot{y}(\epsilon, t) = f_0(t, y(\epsilon, t)) + \epsilon g(t, y(\epsilon, t)) \\ y_0(t_0) = v_0 \end{cases}$$

et $y(\epsilon, t)$ C^k en ϵ et en t ;
En fait $\epsilon \mapsto y(\epsilon, \cdot)$, $(-\epsilon_0, \epsilon_0) \to C^1([t_0, t_1], E)$ est C^k.
Par conséquent, on peut écrire un développement limité

$$y(\epsilon, t) = y_0(t) + \epsilon y_1(t) + \cdots + \epsilon^k y_k(t) + o(\epsilon^k, t)$$

où $o(\epsilon^k)(\cdot) = \epsilon^k \nu(\epsilon)(\cdot)$ avec $\|\nu(\epsilon)(\cdot)\|_{C^1([t_0, t_1])}$ tend vers 0 avec ϵ.

Application à la méthode des perturbations

Le but de la théorie des perturbations est de déterminer les fonctions $y_1(\cdot), \ldots, y_k(\cdot)$.

Application à la méthode des perturbations

Le but de la théorie des perturbations est de déterminer les fonctions $y_1(\cdot), \ldots, y_k(\cdot)$.
Pour cela :

Application à la méthode des perturbations

Le but de la théorie des perturbations est de déterminer les fonctions $y_1(\cdot), \dots, y_k(\cdot)$.
Pour cela :

- On injecte

$$y(\epsilon, t) = y_0(t) + \epsilon y_1(t) + \cdots + \epsilon^k y_k(t) + o(\epsilon^k)(t)$$

  dans

$$\begin{cases} \dot{y}(\epsilon, t) = f_0(t, y(\epsilon, t)) + \epsilon g(t, y(\epsilon, t)) \\ y_0(t_0) = v_0 \end{cases}$$

Application à la méthode des perturbations

Le but de la théorie des perturbations est de déterminer les fonctions $y_1(\cdot), \dots, y_k(\cdot)$.
Pour cela :

- On injecte

$$y(\epsilon, t) = y_0(t) + \epsilon y_1(t) + \cdots + \epsilon^k y_k(t) + o(\epsilon^k)(t)$$

  dans

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y}(\epsilon, t) = f_0(t, y(\epsilon, t)) + \epsilon g(t, y(\epsilon, t)) \\ y_0(t_0) = v_0 \end{array} \right.$$

- et on utilise le fait qu'un développement limité est unique.