MAT431 Equations différentielles et Systèmes dynamiques

Raphaël KRIKORIAN

23 août 2011

Organisation du cours et ressources

- Le polycopié est celui de Claude Viterbo (édition 2009) : nombreuses références bibliographiques à l'intérieur. Dans ces notes c'est la référence [V].
- Transparents (version amphi et version longue) en ligne à l'adresse : à définir ultérieurement.
- Devoir à mi-parcours.
- email : raphael.krikorian@upmc.fr

Sommaire

Plan du cours MAT431

Chapitres 1 à 8 du polycopié [V] + Notes de cours (version longue des transparents)

1) Introduction générale : le pendule forcé périodiquement, rappels de calcul différentiel, théorème du point fixe de Picard et théorèmes des fonctions implicites et d'inversion locale.
2) Théorème d'existence de Cauchy-Lipschitz cas linéaire et non-linéaire, dépendance par rapport aux paramètres (cas linéaire), E.D.O. à coefficients constants.
3) E.D.O. linéaires : résolvante, théorie des perturbations. E.D.O. linéaires périodiques, théorème de Floquet.
4) Etude de la stabilité des E.D.O. linéaires périodiques, application à la résonance paramétrique.

Plan du cours MAT431

5) Passage du linéaire au non-linéaire : linéarisation, théorie des perturbations. Temps de vie des solutions : critère géométrique (Lyapunov) et analytique (Gronwall).
6) Analyse géométrique des E.D.O., flots, application de Poincaré ; application à la stabilité. Etude de la dimension 2 (Poincaré-Bendixon)
7) Calcul différentiel Sous-variétés, espace tangent, E.D.O. sur les sous-variétés (systèmes avec contraintes).
8) Hyperbolicité : Théorème de Hartman-Grobman, variétés stable et instable.
9) Exemples d'application : le mouvement du corps solide. Retour sur le pendule forcé périodiquement.

Sommaire

Plan du cours 1

Chapitre 1 de [V] + Notes de cours

1 Introduction

2 Rappels de topologie

3 Rappels de calcul différentiel

4 Théorème du point fixe de Picard

5 Inversion locale et fonctions implicites

Sommaire

Exemples d'équations différentielles

Les équations différentielles (EDO pour Equations Différentielles Ordinaires) modélisent de nombreux phénomènes d'évolution en Physique, Biologie, Economie *etc.*
L'exemple le plus ancien : les équations de la Mécanique (Newton) en particulier le problème à N corps (même le cas $N = 3$ n'est toujours pas complètement compris).
Les équations aux dérivées partielles (équations d'évolution comme l'équation des ondes, de la chaleur, de Schrödinger) peuvent souvent être considérées comme des EDO en dimension infinie.
Comme il est en général impossible de résoudre explicitement une équation différentielle, un point de vue fructueux est d'essayer de comprendre le comportement qualitatif de ces EDO ou d'en décrire le(s) comportement(s) approché(s).

Méthodes géométriques et analytiques

L'introduction de méthodes géométriques et de méthodes analytiques sera à cet égard une démarche très utile.

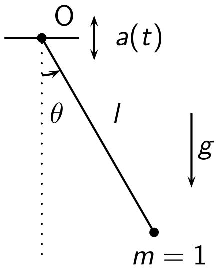
Stabilité/Instabilité ou Régularité et chaos

Un paradigme important dans l'étude des EDO est la notion de stabilité ou encore de régularité : par exemple l'existence de solutions périodiques (qui se répètent périodiquement dans le temps) ou plus généralement quasi-périodiques (solutions ayant plusieurs fréquences)
A contrario, certaines solutions peuvent avoir un comportement instable (par exemple non borné) ou encore chaotique (difficilement prévisible et analogue à un phénomène aléatoire).
En général, pour une même EDO, ces deux types de comportement coexistent.

Un prototype : le pendule forcé périodiquement

Le phénomène de coexistence de solutions régulières et chaotiques apparaît déjà quand on étudie des systèmes très simples : par exemple dans l'étude d'un pendule rigide pesant dont on fait vibrer le point d'attache de façon périodique.

Le pendule forcé périodiquement



Il s'agit de l'équation $\ddot{\theta}(t) + \omega^2(t)\sin(\theta(t)) = 0$ où $\omega(\cdot) = \sqrt{\frac{g(t)}{l}}$, $g(t) = g + a''(t)$ est T-périodique : $\omega(\cdot + T) = \omega(\cdot)$.
Si les oscillations sont petites (lentes), on peut écrire $\omega(t) = \omega_0 + \epsilon f(t)$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$, ϵ petit et $f(t + T) = f(t)$.

Le pendule forcé périodiquement

On peut démontrer par exemple (si ω_0/π est irrationnel) :

- Qu'il existe un ensemble de mesure positive de conditions initiales proches de la position d'équilibre stable (pendule la tête en bas) pour lesquelles le mouvement du pendule est quasi-périodique (mouvement régulier)
- Qu'il existe des conditions initiales proches de la position d'équilibre instable (pendule la tête en haut) pour lesquelles le pendule tournera n_1 fois vers la droite, puis n_2 fois vers la gauche, puis n_3 fois vers la droite etc. où on peut prescrire à l'avance les entiers $n_1, n_2, n_3, \ldots$
- Qu'il existe des conditions initiales proches de la position d'équilibre stable pour lesquelles le mouvement, bien que stable (les oscillations restent petites), est "chaotique" (dans un sens à définir).

Sommaire

Rappels de topologie

Pour plus de détails sur cette section consulter [V, chap.1].

Espaces métriques

Un espace métrique (X, d) est la donnée d'un ensemble X et d'une distance $d : X \times X \to [0, \infty[$ telle que pour tous $x, y, z \in X$:

(i) $d(x, y) = 0$ ssi $x = y$

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$

(iii) $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$

Un exemple important est celui des espaces (vectoriels) normés : E est un $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $\|\cdot\| : E \to [0, \infty[$ vérifie pour tous $u, v \in E$, λ scalaire

(i) $\|u\| = 0$ ssi $u = 0$

(ii) $\|\lambda u\| = |\lambda|\|u\|$

(iii) $\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$.

Dans ce cas $d(u, v) = \|u - v\|$ est une distance.

Ouverts, fermés

- Un ouvert U de X est un ensemble tel que pour tout $x \in U$ il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U$ ($B(x, r)$ est la boule ouverte de centre x et de rayon r $B(x, r) := \{y \in X : d(x, y) < r\}$).
- Un ensemble est fermé ssi son complémentaire est ouvert.
- Une union (resp.intersection) quelconque d'ouverts (resp. fermés) est ouverte (resp.fermée) ; une intersection (resp. union) finie d'ouverts (resp fermés) est ouverte (resp. fermée).
- Une application $f : X \to Y$ est continue ssi pour tout $V \subset Y$ ouvert (resp. fermé) l'ensemble $f^{-1}(V) = \{x \in X : f(x) \in V\}$ est ouvert (resp. fermé).
- De façon équivalente f est continue si pour toute suite (x_n) de X qui converge on a $\lim f(x_n) = f(\lim x_n)$.

Intérieur, fermeture

- L'intérieur $\mathring{A}$ d'un ensemble $A \subset X$ est le plus grand ouvert de X (pour l'inclusion) inclus dans A. On a $\mathring{A} = \{x \in A : \exists r > 0, B(x, r) \subset A\}$. L'ensemble $A \subset X$ est ouvert dans X si $\mathring{A} = A$.
- L'adhérence $\overline{A}$ (ou la fermeture) de $A \subset X$ est le plus petit fermé de X contenant A. On a $\overline{A} = \{x \in X, \ \exists (a_n) \in A^{\mathbb{N}}, \ \lim a_n = x\}$. L'ensemble $A \subset X$ est fermé dans X si $\overline{A} = A$.

Remarque : topologie sur X

- La collection de tous les ouverts d'un espace métrique s'appelle sa topologie.
- De façon générale une topologie sur un ensemble X est une collection d'ensembles (les ouverts de la topologie) qui contient l'ensemble vide et X, qui est stable par unions quelconques et stable par intersections finies.
- Si (X, d) est un espace métrique et $Y \subset X$, la restriction de d à $Y \times Y$ est encore une distance dite distance induite. Les ouverts de (Y, d) sont les intersections des ouverts de X avec Y. On dit que la topologie de (Y, d) est *induite* par celle de X.

Espaces métriques complets

Si (X, d) est métrique :

- Une suite de Cauchy (u_n) est par définition une suite telle que : pour tout $\epsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $n, m \geqslant N$, on ait $d(u_n, u_m) \leqslant \epsilon$.
- Un espace métrique (X, d) est dit complet si toute suite de Cauchy converge.
- Un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est dit de Banach s'il est complet.

Espaces métriques complets
Exemples

Exemples

- Si E est un espace vectoriel de dimension finie (sur $\mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$), il est complet pour n'importe laquelle de ses normes.
- Si U est un ouvert de l'EVN E et si F est un Banach alors l'ensemble $C^0(U, F)$ des applications continues $f : U \to F$ telles que $\sup_{x\in U} \|f(x)\| < \infty$, muni de la norme $\|f\| = \sup_{x\in U} \|f(x)\|$ est un espace de Banach.

Espaces métriques complets
Exemples

- L'espace vectoriel des applications linéaires continues de $E \to F$, noté $L_c(E, F)$, muni de la norme d'opérateur est un espace de Banach si F est de Banach : la norme d'opérateur est définie par : si $T \in L_c(E, F)$, $\|T\| = \sup_{x\in E-\{0\}} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E}$.
- La norme d'opérateur vérifie : si $T, S \in L_c(E, E)$, $\|T \circ S\| \leqslant \|T\| \times \|S\|$
- L'ensemble des opérateurs linéaires continus inversibles (et d'inverse continu) d'un Banach E dans lui même est un ouvert de $L_c(E, E)$ (muni de la norme d'opérateurs) : par ex. la boule de centre id et de rayon $r < 1$ dans $L_c(E, E)$ est constitué d'opérateurs inversibles et d'inverse continu en effet : $(id + U)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} U^k$, si $\|U\| \leqslant r < 1$.

Espaces métriques compacts

- Un espace métrique (X, d) est compact si de tout recouvrement ouvert $X \subset \bigcup_{i\in I} U_i$ de A on peut extraire un sous-recouvrement fini : $X \subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$.
- Un compact est toujours fermé et borné et un fermé dans un compact (muni de la distance induite) est compact.
- Si X, Y sont deux espaces métriques, si X est compact et si $f : X \to Y$ est continue alors $f(X)$ est compact (très utile).
- Critère séquentiel (X, d) est compact ssi de toute suite on peut extraire une sous-suite convergente. La preuve repose sur le lemme de recouvrement de Lebesgue (cf. [V], lemme 1.20) qui est utile en soit.
- Une intersection décroissante de fermés non-vides dans un compact (X, d) est compacte et non-vide.
- En dimension finie $X \subset \mathbb{R}^n$ est compact ssi il est fermé et borné.

Espaces métriques connexes

- Un espace métrique (X, d) est connexe ssi on ne peut pas l'écrire comme union disjointe de deux ouverts (resp. deux fermés) non-vides.
- Il est équivalent de dire que toute application continue de X dans un ensemble fini (p. ex. $\{0, 1\}$) est constante.
- Si $A \subset X$ on dit que A est connexe s'il est connexe pour la topologie induite ((A, d) est connexe) ou de façon équivalente que toute application continue de (A, d) dans $\{0, 1\}$ est constante.
- Si $A \subset X$ est connexe alors $\overline{A}$ est connexe : en effet si $f : \overline{A} \to \{0, 1\}$ est continue alors $f|A$ est continue et $f(A)$ ne contient qu'un seul point (A connexe) et comme tout point de $\overline{A}$ est une limite de points de A, il en est de même de $f(\overline{A})$.

Espaces métriques connexes

- L'image d'un connexe par une application continue est connexe (très utile).
- Les connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.
- On dit qu'un ensemble X est connexe par arcs si pour tous $x, y \in X$ il existe $\gamma : [0, 1] \to X$ continue telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. Un ensemble connexe par arcs est connexe.
- Un ouvert d'un EVN est connexe par arcs ssi il est connexe.

Composantes connexes

- On dit que C est une composante connexe de X si c'est un sous-ensemble connexe de X, maximal pour cette propriété (pour l'inclusion).
- Si $x \in X$, la composante connexe de x est le plus grand sous-ensemble connexe de X contenant x : c'est l'union de tous les connexes de X contenant x. Cet ensemble est non vide ($\{x\}$ est un connexe contenant x) et est bien connexe : il suffit de vérifier qu'une union de connexes d'intersection non-vide est connexe (si f est une application continue de cette union dans $\{0, 1\}$ elle est constante sur chacun des connexes de l'union ; comme ces connexes ont une intersection non vide, ces valeurs constantes coïncident sur tous ces connexes : le critère de connexité est vérifié).
- L'ensemble des composantes connexes de X forme une partition de X et on peut donc définir une relation d'équivalence $x \sim y$ ssi x et y sont dans la même composante connexe de X.

Composantes connexes

- Si $A \subset X$, les composantes connexes de A sont définies comme les composantes connexes de A pour la topologie induite.
- Une composante connexe est toujours fermée (l'adhérence d'une telle c.c. est connexe et par maximalité égale à la c.c.) .
- Dans $\mathbb{R}^n$ un ouvert U admet un nombre dénombrable de composantes connexes qui sont des ouverts de l'espace ambiant $\mathbb{R}^n$: en effet si $x \in C$ où C est une c.c. de U alors pour un certain $r > 0$ la boule ouverte $B(x, r)$ qui est un connexe de U et contient x est nécessairement incluse dans C (par maximalité de C) ; ainsi C est ouverte. L'ensemble des composantes connexes de U forme donc une partition en ouverts de U. On peut donc choisir dans chaque C un point à coordonnées rationnelles. Ce codage démontre que la partition est au plus dénombrable.

Composantes connexes

On peut de la même façon définir la notion de composantes connexes par arcs (pour un ouvert de $\mathbb{R}^n$ ces deux notions coïncident).

Sommaire

Rappels de calcul différentiel

Soient E, F deux Banach, U un ouvert de E, $x_0 \in U$ et $f : U \to F$.

Definition

L'application f est différentiable (ou encore dérivable) en x_0 s'il existe une application linéaire continue $A_{x_0} : E \to F$ (la continuité est automatique en dimension finie) telle que la limite suivante est nulle :

$$\lim_{v \to 0} \frac{\|f(x_0+v) - (f(x_0) + A_{x_0}.v)\|_F}{\|v\|_E} = 0.$$

Si elle existe, une telle application linéaire est unique. On note $A_{x_0} = Df(x_0)$.

On a donc $f(x_0+v) = f(x_0) + Df(x_0) \cdot v + o(\|v\|)$.

Rappels de calcul différentiel

- On notera $Df(x_0) := A_{x_0}$ et on l'appellera l'application linéaire tangente ou la différentielle de f en x_0.
- En d'autres termes, $f(x_0) + Df(x_0) \cdot v$ est, *uniformément en v* (au voisinage de $v = 0$), une bonne approximation *affine* de $f(x_0 + v)$ à l'ordre $o(\|v_E\|)$.
- L'application linéaire $Df(x_0)$ étant continue (i.e vérifiant $\|Df(x_0).v\|_F \leqslant C.\|v\|_E$) il est clair que f est alors *continue* en x_0.
- Si f est dérivable en tout point de U et si l'application $x \mapsto Df(x)$ (de U dans $L_c(E,F)$ muni de la norme d'opérateurs) est continue on dit que f est C^1.
- Si $x \mapsto Df(x)$ est dérivable son application linéaire tangente est une application continue de E dans $L_c(E,F)$ qu'on note $D^2f(x)$. Elle s'identifie avec une application bilinéaire continue de $E \times E \to F$.
- De la même façon on peut définir par récurrence la notion d'application de classe C^p ; $D^pf(x)$ est par nature une application p-linéaire continue de E^p dans F.

Rappels de calcul différentiel
Exemples

- Si $f : E \times F \to G$ est telle que pour $y \in F$ fixé l'application $E \to G$, $x \mapsto f(x,y)$ est dérivable, on note $D_1 f(x,y)$ ou $\partial_x f(x,y)$ sa dérivée en x. On parle alors de dérivée partielle.
- En dimension finie, Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $(x_1,\ldots,x_n) \mapsto (f_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_m(x_1,\ldots,x_n))$ est C^1, $Df(x)$ s'identifie avec la *matrice jacobienne* $Jf(x)$:

$$Jf(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_1,\ldots,x_n)\right)_{1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant n}.$$

- En outre en dimension quelconque si E, F, G sont des EVN, U ouvert de $E \times F$ et $f : U \to G$ f est de classe C^1 si et seulement si toutes ses dérivées partielles existent et sont continues sur U.

Rappels de calcul différentiel
Exemples

- L'application $f : M(n,\mathbb{R}) \to M(n,\mathbb{R})$, $A \mapsto A^2$ est dérivable et son application linéaire tangente en A est l'application linéaire $M(n,\mathbb{R}) \to M(n,\mathbb{R})$ qui à H associe $AH + HA$. En effet, $(A+H)^2 = A^2 + AH + HA + H^2$ et $H^2 = o(\|H\|)$.
- L'application $GL(n,\mathbb{R}) \to GL(n,\mathbb{R})$, $A \mapsto A^{-1}$ est C^1 et sa différentielle en A est l'application linéaire $M(n,\mathbb{R}) \to M(n,\mathbb{R})$, $H \mapsto -A^{-1}HA^{-1}$.
- L'application $M(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $A \mapsto \det(A)$ est C^1 et sa différentielle en A est l'application linéaire $M(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $H \mapsto \mathrm{tr}(Co(A)^T H)$ $(Co(A)^T$ est transposée de la co-matrice de $A)$.
- Exemple en dimension infinie : L'application $u \mapsto \int_0^1 K(\cdot, y, u(y))dy$ de $C^0([0,1],\mathbb{R})$ (muni de la norme du sup) vers $\mathbb{R}$ est de classe C^1 si K est elle-même C^1.

Rappels de calcul différentiel
Quelques propriétés utiles

- Composition $D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \circ Df(x) = Dg(f(x))Df(x)$
- Accroissements finis : Si U est un ouvert convexe, $a, b \in U$ alors $\|f(b) - f(a)\| \leqslant \sup_U \|Df\| \cdot \|b-a\|$.
- Théorème de Schwarz : Si f est p-fois dérivable $D^p f(x)$ est une application p-linéaire symétrique.
- Formules de Taylor (reste intégral) Si U est un ouvert convexe et $f : U \to F$ est de classe C^{p+1} ; alors,

$$f(b) - f(a) - Df(a).(b-a) - \cdots \frac{1}{p!}Df^{(n)}(a).((b-a))^n =$$
$$\int_0^1 \frac{(1-t)^p}{p!} Df^{(p+1)}(a + t(b-a)).((b-a))^{p+1} dt.$$

- L'espace $C^p(U,F)$ muni de la norme $\|f\|_p = \max_{0\leqslant k\leqslant p} \sup_{x\in U} \|D^k f(x)\|$ est un espace de Banach

Sommaire

Théorème du point fixe de Picard

Soient (A, d_A), (B, d_B) deux espaces métriques.

- Nous disons que $T : A \to B$ est ρ-lipschitzienne si $x, y \in A$,

$$d_B(T(x), T(y)) \leqslant \rho.d_A(x, y).$$

- Si $A = B$ on dit que $T : A \to A$ est ρ-contractante si elle est ρ-lipschitzienne avec $0 \leqslant \rho < 1$.

Une application lipschitzienne est donc continue. On note $C^{lip}(A, B)$ l'ensemble des $T : A \to B$ qui sont lipschitziennes et on note $Lip(T)$ la plus petite constante ρ admissible dans la définition précédente.

Théorème du point fixe de Picard

Théorème (du point fixe de Picard)

Avec les notations précédentes, supposons que (A, d) soit complet (i.e. toute suite de Cauchy converge) et soit $T : A \to A$ une application ρ-contractante ($0 \leqslant \rho < 1$). Alors T admet un unique point fixe $x \in A$ (i.e. $T(x) = x$). Pour tout $x_0 \in A$ la suite $T^i(x_0)$ converge vers x.

Remarque : Pour obtenir les mêmes conclusions, il suffit de supposer qu'il existe n pour lequel T^n soit contractante : appliquons en effet le théorème précédent à T^n ; si $T^n(x) = x$ alors $T^n(T(x)) = T(T^n(x)) = T(x)$. D'après l'unicité, $T(x) = x$. Ce point fixe pour T est unique car tout point fixe de T est point fixe de T^n.

Théorème du point fixe de Picard

Démonstration.

- *Existence* : Si $y \in A$, $d(T^{n+1}(y), T^n(y)) \leqslant \rho d(T^n(y), T^{n-1}(y)) \leqslant \rho^n d(T(y), y)$.
- Donc en sommant de n à $n + p - 1$, $d(T^{n+p}(y), T^n(y)) \leqslant \frac{\rho^n}{1-\rho} d(T(y), y)$.
- La suite $T^n(y)$ est par conséquent de Cauchy et ainsi converge vers un x.
- Comme $T^n(y) \to x$ on a $T^{n+1}(y) \to T(x)$ et donc $T(x) = x$.
- *Unicité* : si $T(y) = y$ et $T(y') = y'$ alors $d(y, y') = d(T(y), T(y')) \leqslant \rho d(y, y')$ et comme $0 \leqslant \rho < 1$ on a $d(y, y') = 0$.

$\square$

Théorème du point fixe de Picard

Théorème de Picard à paramètre, version C^0 et lipschitz

Théorème (Picard à paramètre (version C^0 et lipschitz))

Soient (A, d) un espace métrique complet, Λ un espace métrique (topologique suffit) et $0 \leqslant \rho < 1$. Soit $T : A \times \Lambda \to A$ telle que pour tout $\lambda \in \Lambda$ l'application $T(\cdot, \lambda) : A \to A$ soit ρ-contractante. Alors, si T est continue, pour tout $\lambda \in \Lambda$ il existe un unique point fixe $x(\lambda)$ de $T(\cdot, \lambda)$ et l'application $x(\cdot) : \Lambda \to A$ est continue ; si en outre pour tout $x \in A$ fixé l'application $T(x, \cdot) : \Lambda \to A$ est C-lipschitzienne, l'application $x : \Lambda \to A$ est $C/(1 - \rho)$-lipschitzienne.

Théorème du point fixe de Picard

Démonstration.
Cas C^0.

On applique le Théorème de Picard à $\mathcal{T} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ où $\mathcal{A} = C^0(\Lambda, A)$ muni de la norme du sup ($\|x\| = \sup_{\lambda\in\Lambda} \|x(\lambda)\|$) et $\mathcal{T}(x(\cdot)) = T(x(\cdot), \cdot)$ qui est bien ρ-contractante. □

Théorème du point fixe de Picard

Démonstration.
Cas *Lipschitz*.

Notons $x(\lambda)$ le point fixe de $T(\cdot,\lambda)$ et écrivons $T(x(\mu),\mu) - T(x(\lambda),\lambda) = T(x(\mu),\mu) - T(x(\lambda),\mu) + T(x(\lambda),\mu) - T(x(\lambda),\lambda)$. En utilisant l'inégalité triangulaire et le caractère ρ et C-lipschitzien de $T(\cdot,\mu)$ et $T(x(\lambda),\cdot)$ on obtient

$$\|x(\mu) - x(\lambda)\| \leqslant C\|\mu - \lambda\| + \rho\|x(\mu) - x(\lambda)\|$$

ce qui donne le résultat. □

Théorème du point fixe de Picard

Théorème de Picard à paramètre (version C^k)

Théorème (Picard à paramètre, version C^k)

Soient $A \subset U \subset E$, U ouvert et A fermé du Banach E, $\Lambda \subset F$, Λ ouvert de l'EVN F ; soit en outre $0 \leqslant \rho < 1$. Supposons que $T : U \times \Lambda \to E$ soit de classe C^k ($k \geqslant 1$), envoie $A \times \Lambda$ dans A et que : (a) pour tout $\lambda \in \Lambda$, l'application $T(\cdot,\lambda) : A \to A$ est ρ-contractante et : (b) pour tout $(x,\lambda) \in U \times \Lambda$ on a $\|D_x T(x,\lambda)\| \leqslant \rho$. Alors, pour tout $\lambda \in \Lambda$ il existe un unique point fixe $x(\lambda)$ de $T(\cdot,\lambda)$ et l'application $x(\cdot) : \Lambda \to A$ est C^k et on a

$$Dx(\lambda) = -(D_x T(x(\lambda),\lambda) - Id)^{-1} D_\lambda T(x(\lambda),\lambda).$$

Théorème du point fixe de Picard

Théorème de Picard à paramètre (version C^k)

Remarque : C'est une version corrigée par rapport à la première version du Cours 1

- La condition (b) n'implique (a) que si U est convexe.
- On peut remplacer la condition (a) par : pour tout $\lambda \in \Lambda$ il existe un unique point fixe $x(\lambda)$ de $T(\cdot,\lambda)$ et l'application $\lambda \mapsto x(\lambda)$ est continue.
- La condition $\|D_x T(\cdot,\lambda)\| \leqslant \rho < 1$ implique que $Id - D_x T(x,\lambda)$ est inversible pour $x \in A$.

[Remarque : l'hypothèse sur $D_x T$ est implicite dans la preuve du Théorème 1.11 de [V].]

Théorème du point fixe de Picard

Démonstration.

- La condition $\forall (x, \lambda) \in U \times \Lambda$, $\|D_1 T(x, \lambda)\| \leqslant \rho$ garantit que pour tout $\lambda \in \Lambda$, l'application $T(\cdot, \lambda) : A \to A$ est ρ-contractante (inégalité des accroissements finis).
- Notons $x(\lambda)$ le point fixe associé à $T(\cdot, \lambda)$; par la version lipschitzienne de Picard, on sait que $x : \Lambda \to A$ est lipschitzienne (au moins au voisinage d'un point $\lambda_0 \in \Lambda$ choisi à l'avance).
- Si on pose $\Delta x(\lambda, \Delta\lambda) = x(\lambda + \Delta\lambda) - x(\lambda)$, on a donc $\|\Delta x(\lambda, \Delta\lambda)\| \leqslant C\|\Delta\lambda\|$.
- Comme $x(\lambda) = T(x(\lambda), \lambda)$ et $x(\lambda + \Delta\lambda) = T(x(\lambda + \Delta\lambda), \lambda + \Delta\lambda)$

$$\Delta(\lambda, \Delta\lambda) = D_1 T(x(\lambda), \lambda)\Delta x(\lambda, \Delta\lambda) + D_2 T(x(\lambda), \lambda)\Delta\lambda + o(\Delta\lambda).$$

Théorème du point fixe de Picard

- En itérant l'inégalité précédente on obtient

$$\Delta x(\lambda, \Delta\lambda) = (D_1 T(x(\lambda), \lambda)^n \Delta x(\lambda, \Delta\lambda) + \sum_{k=0}^{n-1} (D_1 T(x(\lambda), \lambda))^k D_2 T(x(\lambda), \lambda)\Delta\lambda + o_n(\Delta\lambda). \quad (1)$$

(Remarquer que le petit o dépend aussi de n).

- Soit $\epsilon > 0$ et choisissons n tel que pour λ dans un voisinage de λ_0, on ait $\rho^n \max(C, (1-\rho)^{-1}\|D_2 T(x(\lambda), \lambda)\|) < \epsilon/3$
- Si on note $L(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} (D_1 T(x(\lambda), \lambda))^k D_2 T(x(\lambda), \lambda) \in L_c(E, E)$ (existe car $\rho < 1$) on a $\|\Delta x(\lambda, \Delta\lambda) - L(\lambda)\Delta\lambda\| \leqslant (2\epsilon/3)\Delta\lambda + o_n(\Delta\lambda)$. Donc pour $\Delta\lambda$ suffisamment petit $\|x(\lambda + \Delta\lambda) - x(\lambda) - L(\lambda)\Delta\lambda\| \leqslant \epsilon\|\lambda\|$.

Théorème du point fixe de Picard

- Cela démontre que $x(\cdot)$ est dérivable en λ et que $Dx(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} (D_1 T(x(\lambda), \lambda))^k D_2 T(x(\lambda)$.
- Cette série est absolument convergente donc $Dx(\cdot)$ est continue (observer que $D_1 T(x(\lambda), \lambda)$, $D_2 T(x(\lambda), \lambda)$ sont continues en λ).
- La relation $Dx(\lambda) = -(D_1 T(x(\lambda), \lambda) - Id)^{-1} D_2 T(x(\lambda), \lambda)$ (obtenue en dérivant $x(\lambda) = T(x(\lambda), \lambda)$) montre par récurrence que $x(\cdot)$ est C^k si T est C^k. □

Sommaire

Inversion locale

Théorème (d'inversion locale)

Soient E, F deux espaces de Banach, $f : E \to F$ une application de classe C^k $(k \geqslant 1)$ définie sur un voisinage de $x_0 \in E$ de l'espace de Banach E et telle que $f(x_0) = y_0 \in F$. Supposons que $Df(x_0) \in \mathcal{L}(E, F)$ soit inversible (et son inverse est donc continu) ; alors f est un difféomorphisme local de classe C^k d'un voisinage de x_0 sur un voisinage de y_0 c'est-à-dire une application bijective de classe C^k d'un voisinage de x_0 sur un voisinage de y_0 dont l'inverse est également C^k.

Démonstration. On suppose $x_0 = y_0 = 0$. Il suffit d'appliquer le théorème du point fixe de Picard à paramètre à $T_y(x) := Df(0)^{-1}y + (x - Df(0)^{-1}.f(x))$. Ses hypothèses sont vérifiées pourvu que y appartienne à un voisinage suffisamment petit de 0 (accroissements finis). □

Inversion locale
Exemples

(a) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f : (x, y) \mapsto (2x + y + y^3, x + y + x^5)$; alors il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, $|u|^2 + |v|^2 \leqslant \epsilon$, il existe (x, y) dans un voisinage de 0 pour lesquels $f(x, y) = (u, v)$.
- En effet $f(0) = 0$ et $Df(0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ qui est inversible. On applique alors le théorème d'inversion locale.

(b) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue bornée. L'équation $f(x + 1) + \sin(f(x)^2) = g(x)$ admet une solution f continue bornée pourvu que $\sup_{x\in\mathbb{R}} |g(x)|$ soit suffisamment petit. En effet, l'application $\Phi : C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\Phi(f) = f(\cdot + 1) + \sin(f(\cdot)^2)$ est C^1 et $D\Phi(0) = S$ où $S : f(\cdot) \mapsto f(\cdot + 1)$ est clairement inversible.

Fonctions implicites

Théorème (des fonctions implicites)

Si $f : E \times F \to E$ est C^k, vérifie $f(x_0, \lambda_0) = 0$ et si $D_x f(x_0, \lambda_0) \in L_c(E, E)$ est inversible, alors il existe un voisinage de (x_0, λ_0) tel que l'ensemble des solutions de $f(x, \lambda) = 0$ dans ce voisinage est de la forme, $(x(\lambda), \lambda)$ où $\lambda \mapsto x(\lambda)$ est C^k. On a alors $\partial_\lambda x = -(D_x f(x, \lambda))^{-1} \circ D_\lambda f$.

Démonstration. On applique le théorème d'inversion locale à l'application de classe C^k, $\phi(x, \lambda) = (f(x, \lambda), \lambda)$ définie sur un voisinage de $(x_0, \lambda_0) \in E \times F$ et à valeurs dans un voisinage de $(x_0, \lambda_0) \in E \times F$. □

Fonctions implicites
Exemples

L'ensemble Γ des $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $y^5 + xy - 1 = 0$ contient un graphe $(x, y(x))$, $-\epsilon < x < \epsilon$ pour ϵ assez petit. En effet, $(0, 1) \in \Gamma$ et $\partial_y(y^5 + xy - 1) = 5y^4 + 1$ est non nulle en $(0, 1)$.