MAT431 - 2006-2007.
EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ET SYSTÈMES DYNAMIQUES

INDICATIONS – Feuille d'exercices numéro 4 - Exercices 4 et 7.

Exercice 4 : Le gradient comme champ de vecteurs.
Soit $f \in C^k(U)$ à valeurs réelles, où U est un ouvert de $\mathbf{R}^n$, et $k, n \in \mathbf{N}^*,\ k \geq 2$.

1) Démontrer que les orbites périodiques du champ de vecteurs défini par le gradient de f sont toutes réduites à un point. Caractériser l'ensemble de ces points.

———— $\frac{d}{dt} f(x(t)) = \|\nabla f(x(t))\|^2$. Pour une solution T-périodique, on trouve donc $\int_0^T \|\nabla f(x(s))\|^2 ds = 0$, d'où $\nabla f(x(t)) = 0$ sur l'orbite, et $x(t) = x(0)$ est un point. Ce sont les points critiques de f.

2) Vérifier que les orbites qui ne sont pas constantes sont partout orthogonales aux hypersurfaces de niveau de la fonction f.

———— Une tangente à l'orbite est donnée par le vecteur vitesse le long de l'orbite, colinéaire à $\nabla f(x(t))$, vecteur orthogonal à l'hypersurface de niveau de f.

3) On suppose dans cette question que les épidomaines $U_x = \{P \in U | f(P) \geq x\}, x \in \mathbf{R}$, sont tous compacts. Démontrer que le champ de gradient de f est positivement complet (i.e. que le domaine de définition de toute orbite maximale contient la demi-droite positive).

———— Pour $t \geq 0$ tant que la solution existe, $x(t)$ reste dans $U_{x(0)}$ compact. Donc la solution existe pour tout $t \geq 0$.

4) Démontrer que tout point d'accumulation $\bar{x}$ de l'orbite d'un champ de gradient ∇f (i.e. tout point d'un des ensembles limites $L_\alpha(P)$ et $L_\omega(P)$ d'un point P de U) est un point critique de la fonction f.

——— Par l'absurde. Supposons que $\bar{x}$ n'est pas un point d'équilibre, i.e. $\nabla f(\bar{x}) \neq 0$. Alors $\exists r > 0$ tel que $\|y - \bar{x}\| < r \Rightarrow 0 < m < \|\nabla f(y)\| \leq M$. Pour $\epsilon = \inf(r/2, m^2 r/(4M))$, $\exists \alpha > 0$ tel que $\|y - \bar{x}\| < \alpha \Rightarrow f(y) > f(\bar{x}) - \epsilon$. Maintenant, il existe $\bar{t}$ tel que $\|x(\bar{t}) - \bar{x}\| \leq \alpha$. Alors, pour t tel que $|t - \bar{t}| < r/(2M)$, on a $\|x(t) - x(\bar{t})\| \leq M|t - \bar{t}| \leq r/2$. D'où, $f(x(\bar{t} + (r/2M))) > f(x(\bar{t})) + m^2 r/(2M) > f(\bar{x}) - \epsilon + m^2 r/(2M) > f(\bar{x}) + m^2 r/(4M)$. Comme $f(x(t))$ est croissante, $x(t)$ ne peut pas avoir comme point d'accumulation $\bar{x}$.

5) On suppose dans cette question que $U = \mathbf{R}^n$ et que, de plus, l'ensemble des points critiques de la fonction f est discret. Etablir que les orbites (maximales) bornées qui ne sont pas constantes relient exactement deux points critiques de f, i.e. qu'elles convergent en plus et moins l'infini vers un point critique de f.

——— Une orbite bornée a au moins un point d'accumulation $\bar{x}$ en $+\infty$. Si l'on suppose qu'il y a un autre point d'accumulation, l'orbite passe de façon récurrente de l'un à l'autre, et donc a une infinité non dénombrable d'autres points d'accumulation (intersection de l'orbite avec des petites sphères centrées en $\bar{x}$).

6) Que devient l'énoncé précédent si l'on remplace l'hypothèse $U = \mathbf{R}^n$ par la compacité des épidomaines U_x introduits au point 3 ?

——— Idem.

Exercice 7 : Soit $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, locallement Lipschitzienne telle que $g(0) = 0$. Soit $G(u) = \int_0^u g(s)ds$. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe une solution paire strictement positive $u(x)$ de

$$(*) \qquad u'' + g(u) = 0 \text{ sur } \mathbf{R}, \quad \lim_{x \to \pm\infty} u(x) = 0,$$

si et seulement si il existe $u_0 > 0$ tel que

$$(**) \qquad g(u_0) > 0, \quad G(u_0) = 0 \quad \text{et} \quad G(u) < 0 \text{ pour tout } 0 < u < u_0.$$

1) Préliminaire: montrer que si $u \in C^2(\mathbf{R})$ vérifie $\lim_{x \to +\infty} u(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} u''(x) = 0$, alors $\lim_{x \to +\infty} u'(x) = 0$.

————

$$u(t+1) - u(t) = \int_0^1 u'(t+s)ds = u'(t) + \int_0^1 \int_t^{t+s} u''(\sigma)d\sigma ds,$$

d'où

$$|u'(t)| \leq |u(t+1) - u(t)| + \tfrac{1}{2} \sup_{t \leq \sigma \leq t+1} |u''(\sigma)|$$

et la conclusion

————

2) En déduire que si u vérifie $(*)$ alors $\frac{1}{2}(u')^2(x) + G(u(x)) = 0$ pour tout x.

———— Par hypothèse $u(x)$ tend vers 0. Comme $g(0) = 0$, u'' tend aussi vers 0 pour $x \to +\infty$ par l'équation. La quantité $\frac{1}{2}(u')^2(x) + G(u(x))$ étant constante et ayant une limite nulle en $+\infty$ par la question 1), elle est bien nulle.

————

3) Montrer que si u est solution de $(*)$ comme dans l'énoncé, alors $u'(0) = 0$ et $u'(x) \neq 0$ pour tout $x \neq 0$. En déduire que g vérifie $(**)$ pour $u_0 = u(0)$.

———— $u'(0) = 0$ par parité. Si l'on suppose que $u'(x_0) = 0$ pour $x_0 > 0$, on obtient que $u(x)$ est une solution périodique, de période au plus $2x_0$, ce qui est absurde. En posant $u_0 = u(0)$, on a bien $G(u_0) = 0$ et par $\frac{1}{2}(u')^2(x) + G(u(x)) = 0$, $G(u) < 0$ pour $0 < u < u_0$. Finalement, si l'on suppose $g(u_0) < 0$, on obtient que u est strictement croissante pour $x > 0$ proche de 0, ce qui est absurde, et si on suppose $g(u_0) = 0$, alors $u \equiv u_0$, ce qui est absurde. Donc $g(u_0) > 0$.

————

4) Réciproquement, supposant $(**)$, montrer que la solution de $(*)$ telle que $u(0) = u_0$ et $u'(0) = 0$ répond à la question.

———— La solution proposée existe sur un intervalle maximal $]-T, T[$ (elle est paire par unicité pb. de Cauchy). Puisque $u''(0) < 0$, $u'(x) < 0$ pour $x > 0$ proche de 0, et u est décroissante pour $x > 0$ proche de 0. Si il existe x_0 tel que $u(x_0) = 0$ alors $u'(x_0) = 0$ par $\frac{1}{2}(u')^2(x) + G(u(x)) = 0$ et $u \equiv 0$, ce qui est absurde. Tant que $0 < u < u(0)$, u est décroissante. Donc u est globale et décroissante sur $[0, +\infty)$ $(T = +\infty)$. Donc u admet une limite $0 \leq \ell < u_0$ en $+\infty$, d'où $u'' \to g(\ell) = 0$. Par 1), $u' \to 0$ et donc $G(\ell) = 0$. Donc $\ell = 0$.

————

5) Faire le lien avec l'exercice 1.

———— Sur les portraits de phases dans les exemples, on repère la solution que l'on vient de construire.