MAT 431 2011-2012
EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ET SYSTÈMES DYNAMIQUES

Indications de correction du
Contrôle de Classement du 8 novembre 2011

Exercice 1

Le système (1) mis sous forme de système linéaire d'ordre 1 est $X'(t) = A(t)X(t)$ où $A(\cdot) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\epsilon f(\cdot) & 0 \end{pmatrix}$.

1) Le fait que $R(t,0)$ est à valeurs dans $SL(2,\mathbb{R})$ découle du fait que $\mathrm{tr}A(\cdot) = 0$. On se reportera au cours pour la définition des notions d'hyperbolicité, ellipticité (et celle de système parabolique) et leurs propriétés immédiates.

2) Puisque $A_\epsilon = N + \epsilon F$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -f(\cdot) & 0 \end{pmatrix}$, on peut, d'après le théorème de dépendance différentiable de la résolvante en fonction du paramètre ϵ, écrire le développement limité en $\epsilon = 0$ de $\epsilon \mapsto R_\epsilon(t,0)$: $R_\epsilon(t,0) = e^{tN} + \epsilon Y(t) + O(\epsilon^2)(t)$ où $\|O(\epsilon^2)\|_{C^1([-T,T])} \leq C\epsilon^2$. Pour identifier Y il suffit d'écrire l'équation différentielle satisfaite par R : $R'_\epsilon(t,0) = A_\epsilon(t)R_\epsilon(t,0)$, $R_\epsilon(0,0) = Id$:

$$Ne^{tN} + \epsilon Y'(t) + O(\epsilon^2)'(t) = (N + \epsilon F)(e^{tN} + \epsilon Y + O(\epsilon^2))$$

et par l'unicité du DL dans $C^0([-T,T])$ on obtient

$$Y'(t) = NY(t) + F(t)e^{tN}, \qquad Y(0) = 0.$$

Déterminons Y : d'après la formule de variation de la constante :

$$Y(t) = \int_0^t e^{(t-s)N} F(s) e^{sN} ds.$$

Après calcul on obtient

$$Y(t) = -\begin{pmatrix} \int_0^t (t-s)f(s)ds & \int_0^t (t-s)sf(s)ds \\ \int_0^t f(s)ds & \int_0^t sf(s)ds \end{pmatrix}.$$

3) Il suffit de constater que

$$\mathrm{trR}_\epsilon(1,0) = 2 - \epsilon \int_0^1 f(s)ds + O(\epsilon^2).$$

Par conséquent, comme $\int f(s)ds > 0$ on a pour $\epsilon > 0$ petit $|\mathrm{tr}(R_\epsilon(1,0)| < 2$ et le système est elliptique : toutes les solutions de (1) sont bornées.

Exercice 2

1) C'est évident avec $X(x,y) = (y, -\omega^2 x - ay - by^3)$.

2) 2.a) Si on note $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -a \end{pmatrix}$ on a $z(t) = e^{tA}z_0$ qui sont évidemment définies pour tout temps. Les valeurs propres de A sont les racines de $\lambda^2 + a\lambda + \omega^2 = 0$: $\lambda_\pm = (-a \pm i\sqrt{-a^2+4\omega^2})/2$ si $|a| > 2|\omega|$ et $\lambda_\pm = (-a \pm \sqrt{a^2 - 4\omega^2})/2$ sinon.

2.b) Si $a > 0$ on a $\max \Re\lambda_\pm < 0$ et dans ce cas l'origine est asymptotiquement stable ; si $a < 0$ on a $\min \Re\lambda_\pm > 0$ et l'origine est asymptotiquement instable (plus précisément a.s. en $t \to -\infty$).

3) 3.a) Cela est clair puisque par définition il existe deux suites t_n, s_n convergeant vers τ telles que $|\phi^{t_n}(z_0)| \geq 1$ et $|\phi^{s_n}(z_0)| \leq 1$.

3.b) Supposons $z_0 \neq 0$, (sinon tout est clair). On constate que $\frac{d}{dt}(H(\phi^t(z))) = -ay(t)^2 - by(t)^4$. La fonction $H(\phi^t(z))$ est donc décroissante et si elle n'était pas strictement décroissante, elle serait constante sur un intervalle $]\tau-\delta, \tau+\delta[$ et donc $y(t)$ serait nulle sur cet intervalle tout comme $y'(t)$. Comme $y'(t) = -\omega^2 x(t) - a(y(t)) - b(y(t))^3$ on devrait donc avoir $x(t) = 0$ sur ce même intervalle. D'après le théorème d'unicité, on aurait $z(t) = 0$ pour tout t.

3.c) D'après la propriété de sortie de tout compact, on voit que $z(t)$ est défini pour tout $t \geq 0$. Le critère de Lyapunov montre que 0 est asymptotiquement stable.

3.d) Dans ce régime, il est bien clair que la seule solution périodique prenant une valeur dans $D(0,10)$ est 0 car tout autre solution périodique doit vérifier $\lim_{t\to\infty} \phi_X^t(z) = 0$.

4) 4.a) Cela découle du théorème de dépendance différentiable et de linéarisation : l'application à valeurs dans $C^1([-2T,2T],\mathbb{R}^2)$, $\psi : (\epsilon, y_0) \mapsto \phi_{X_\epsilon}^{\cdot}((0,y_0))$ est C^∞ et sa dérivée en $(\epsilon = 0, y_0 = p)$ est obtenue de la façon suivante : $D_\epsilon\psi(\epsilon = 0, y_0 = p)d\epsilon + D_{y_0}(\epsilon = 0, y_0 = p)dy_0$ est la solution de l'EDO affine obtenue en linéarisant l'équation initiale le long de l'orbite périodique $\phi^t_{\epsilon=0}(0,p) = (x_p(t), y_p(t))$:

$$Y'(t) = DX_{\epsilon=0}(\phi^t_{\epsilon=0}(0,p))Y(t) + \partial_\epsilon X_{\epsilon=0}(\phi^t_{\epsilon=0}(0,p))d\epsilon, \qquad Y(0) = dy_0.$$

On obtient

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} Y(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\rho}(y(t)) \end{pmatrix} d\epsilon \qquad Y(0) = dy_0.$$

où $\tilde{\rho}(y) = -\alpha y - \beta y^3$. Par la formule de variation de la constante :

$$Y(t) = \begin{pmatrix} \cos(t\omega) & \frac{1}{\omega}\sin(t\omega) \\ -\omega\sin(t\omega) & \cos(t\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ dy_0 \end{pmatrix} +$$
$$d\epsilon \int_0^t \begin{pmatrix} \cos((t-s)\omega) & \frac{1}{\omega}\sin((t-s)\omega) \\ -\omega\sin((t-s)\omega) & \cos((t-s)\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\rho}(y_0\cos(\omega s)) \end{pmatrix} ds.$$

On a dans $C^1([-2T, 2T], \mathbb{R}^2)$, $\psi(\epsilon, y_0) = \psi(0, y_0) + D_\epsilon\psi(0, y_0)\cdot\epsilon + \epsilon^2 g(\epsilon, y_0)(\cdot)$ où l'application $g : (\epsilon, y_0) \mapsto g(\epsilon, y_0)(\cdot)$ à valeurs dans $C^1([-2T, 2T], \mathbb{R}^2)$ est de norme C^2 bornée (sur $[-\epsilon_0, \epsilon_0] \times [0, A]$) ; ainsi

$$\phi^t_{X_\epsilon}(0, y_0) = \begin{pmatrix} \cos(t\omega) & \frac{1}{\omega}\sin(t\omega) \\ -\omega\sin(t\omega) & \cos(t\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ dy_0 \end{pmatrix} +$$
$$\epsilon \int_0^t \begin{pmatrix} \cos((t-s)\omega) & \frac{1}{\omega}\sin((t-s)\omega) \\ -\omega\sin((t-s)\omega) & \cos((t-s)\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\rho}(y_0\cos(\omega s)) \end{pmatrix} ds + \epsilon^2 g(\epsilon, y_0)(t).$$

4.c) La formule précédente montre que

$$x(t) = \frac{1}{\omega}\sin(t\omega)y_0 + \epsilon\int_0^t \frac{1}{\omega}\sin((t-s)\omega)\tilde{\rho}(y_0\cos(\omega s))ds + \epsilon^2 g_1(\epsilon, t, y_0)$$

et donc pour y_0 fixé et $t \in [-3T/2, 3T/2]$, $x(t)$ s'écrit sous la forme $x(t) = \frac{1}{\omega}\sin(t\omega) + v_\epsilon(t)$ où v_ϵ est une fonction de classe C^1, qui s'annule en $t = 0$ et dont la norme C^1 est un $O(\epsilon)$. Comme la fonction $\frac{1}{\omega}\sin(t\omega)$ s'annule en exactement trois points, 0, $T/2$ et T sur l'intervalle $[-T/4, 5T/4]$ et qu'en ces points sa dérivée est non nulle, pour ϵ_0 suffisamment petit, la fonction $x(t) = \frac{1}{\omega}\sin(t\omega) + v_\epsilon(t)$ s'annulera en exactement trois points sur $[-T/5, 6T/5]$: 0 (car $v_\epsilon(0) = 0$), $t_- = T/2 + O(\epsilon)$ et $\tau = T + O(\epsilon)$. Pour $t = t_-$ on constate que $y(t_-)$ est négatif (donc $(x(t_-), y(t_-)) \notin \Sigma$) tandis que $y(\tau)$ est positif et donc $(x(\tau), y(\tau)) \in \Sigma$. Le temps de premier retour est donc $\tau = T + O(\epsilon)$.

4.d) D'après la question précédente $P_\epsilon(y_0) = y(\tau)$

$$y(\tau) = \cos(\tau\omega)y_0 + \epsilon\int_0^\tau \cos((\tau - s)\omega)\tilde{\rho}(y_0\cos(\omega s))ds + \epsilon^2 g_2(\epsilon, y_0)(\tau)$$

et donc

$$y(\tau) = y_0 + \epsilon\int_0^T \cos(s\omega)\tilde{\rho}(y_0\cos(\omega s))ds + \epsilon^2 h(\epsilon, y_0).$$

On trouve finalement

$$P_\epsilon(y_0) = y_0 - T\epsilon(\frac{\alpha}{2} + \frac{3}{8}\beta y_0^3) + \epsilon^2 h(\epsilon, y_0).$$

4.e) L'EDO considérée aura une orbite périodique passant par $(0, y)$ si et seulement si $P_\epsilon(y) = y$ et donc ssi $(\frac{\alpha}{2} + \frac{3}{8}\beta y_0^3) + \epsilon h(\epsilon, y_0) = 0$. La fonction $(\frac{\alpha}{2} + \frac{3}{8}\beta y_0^3)$ admet pour seul zéro sur $]0, A[$ le point $\sqrt{-\frac{4\alpha}{3\beta}}$ et en ce point sa dérivée est non nulle. Par conséquent l'équation $(\frac{\alpha}{2} + \frac{3}{8}\beta y_0^3) + \epsilon h(\epsilon, y_0) = 0$ admet un seul zéro dans $]0, A[$. En ce point, P' vaut $1 + T\epsilon\alpha$ qui est positif et < 1. L'orbite trouvée est donc attractive.

Exercice 3

1) Si un des deux nombres a ou b est négatif $\mathcal{E}_{a,b}$ est vide. Si un de ces nombres est nul, $\mathcal{E}_{a,b}$ est réduit à $\{0\}$. Supposons donc $a > 0$, $b > 0$. Une condition nécessaire pour que $\mathcal{E}_{a,b}$ soit une sous-variété de dimension 1 de $\mathbb{R}^3$ est que pour tout $(x, y, z) \in \mathcal{E}_{a,b}$ l'application linéaire $u \mapsto (DF(x, y, z)u, DG(x, y, z)u)$ de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}^2$ soit de rang 2. C'est le cas si $\begin{pmatrix} x & y & z \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{pmatrix}$ est de rang 2. Si deux des nombres x, y, z sont nuls on doit avoir $a^2 = b$. Si un de ces nombres est nul et les deux autres ont même valeur absolue, alors $a^2 = 2b$; enfin si aucun n'est nul et tous ces nombres ont même valeur absolue alors $a^2 = 3b$. En particulier, si $a^2 \neq b, 2b, 3b$ alors $\mathcal{E}_{a,b}$ est une sous-variété de dimension 1. Si ce n'est pas le cas : (a) si $a^2 = b$ on a $(x^2+y^2+z^2)^2 = x^4+y^4+z^4$ et donc (développer le carré) deux des réels x, y, z sont nuls et l'autre vaut $\pm\sqrt{a}$: $\mathcal{E}_{a,b}$ est un ensemble fini à six points. (b) Si $a^2 = 2b$ on a $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 2(x^4 + y^4 + z^4)$ ce qui est équivalent à $(x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)(-x+y+z) = 0$; $\mathcal{E}_{a,b}$ est donc l'union des 4 cercles qui sont les intersections des plans $x + y + z = 0$, $x - y + z = 0$, $x+y-z = 0$, $-x+y+z = 0$ avec la sphère $x^2+y^2+z^2 = a$. (c) Si $a^2 = 3b$ alors $(x^2+y^2+z^2)^2 = 3(x^4+y^4+z^4)$ et donc $(x^2-y^2)^2+(y^2-z^2)^2+(z^2-x^2)^2 = 0$; $\mathcal{E}_{a,b}$ est une union de 8 points.

2) 2.a) Comme X est tangent à N, l'orbite de x_0 est incluse dans N et comme N est compact, elle est définie pour tout temps. Soit $z \in \mathcal{O}(x_0)$ et (U, ψ) une carte locale ($\psi : U \subset \mathbb{R}^3 \to (\mathbb{R}, 0)$). Le champ de vecteurs $Y := \psi_* X$ est un champ de vecteurs non nul sur un intervalle ouvert $]-\delta, \delta[$ et l'orbite de tout point par $\psi_* X$ est l'intervalle $]-\delta, \delta[$ tout entier. Cela entraîne que $\mathcal{O}(x_0) \cap U = U \cap N$. Par conséquent l'orbite de tout point est ouverte dans N. Démontrons que l'orbite de x_0 par X est fermée dans N : soit t_n telle que $\phi_X^{t_n}(x_0) \to z$. On peut supposer que x_0 et z sont suffisamment proche de façon que $x_0 \in U$ où (U, ψ) est une carte locale en z. Dans la carte locale précédente on voit que $\phi_{\psi_* X}^{t_n}(\psi(x_0)) \to \psi(z)$. Mais comme le champ $\psi_* X$ ne s'annule pas sur $]-\delta, \delta[$ il est clair qu'il existe s tel que $\psi(z) = \phi_{\psi_* X}^s(\psi(x_0))$ et donc $z = \phi_X^s(x_0)$.

2.b) Par compacité de N on a donc bien $N = (\phi^t(x_0)_{t\in\mathbb{R}}$.

L'application $\mathbb{R} \to N, t \mapsto \phi_X^t(x_0)$ est donc surjective. La preuve précédente montre qu'elle est par ailleurs ouverte. Si elle était injective elle serait donc un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur N, mais cela est impossible car $\mathbb{R}$ n'est pas compact.

Il existe donc $t \neq s$ tel que $\phi^t(x_0) = \phi^s(x_0)$ et donc $\phi^T(x_0) = x_0$ où $T = t - s \neq 0$. L'orbite est donc T-périodique.

3) 3.a) Un calcul simple montre que $\frac{d}{dt}F(\phi_X^t(x)) = 0 = \frac{d}{dt}F(\phi_X^t(x))$ car le produit scalaire de $(\nabla F, \nabla G)$ avec ∇F (resp. ∇G) est nul. Si on note $a = F(x,y,z)$, $b = G(x,y,z)$ et si $a^2 \neq b, 2b, 3b$ on voit que l'orbite de (x,y,z) est égale à la sous-variété de dimension 1 $\mathcal{E}_{a,b}$: elle est donc périodique.

3.b*) Le champ de vecteurs $X(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz(z^2-y^2) \\ zx(x^2-z^2) \\ xy(y^2-x^2) \end{pmatrix}$ admet le point $p = (0,1,1)$ comme point fixe. En ce point, $DX(p) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dont les valeurs propres sont $0, \pm 2$ et dont les vecteurs propres associés sont $e_0 := \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_\pm := \begin{pmatrix} \pm 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les vecteurs $e_\pm$ forment une base de l'espace tangent en p à la sphère $S := F^{-1}(F(p))$. Par conséquent, la restriction de X à la sphère S (invariante par le flot de X) admet le point p comme point fixe hyperbolique. Cela entraîne que toute orbite périodique proche de p a une période d'autant plus grande que cette orbite est proche de p. On sait par ailleurs, qu'il existe des orbites périodiques passant arbitrairement proche de p (d'après 3.a)).