Indications de correction de l'examen du 6 mai 2014

Exercice 1 *On dispose de deux pièces de monnaie A et B truquées que l'on ne peut pas distinguer l'une de l'autre. Quand on lance la pièce A le côté pile sort avec probabilité p tandis que le lancer de la pièce B fait apparaître pile avec probabilité $1-p$. On choisit une des deux pièces au hasard et on la lance successivement deux fois. On se propose de répondre à la question suivante : sachant que pile apparaît lors du premier lancer, quelle est la probabilité que pile apparaisse lors du second lancer ?*

On modélisera le problème de la façon suivante : Il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ et des variables aléatoires $L : \Omega \to \{A, B\}$, $X_1, X_2 : \Omega \to \{1, 0\}$ (pile = 1, face = 0) tels que : (i) $\mathbb{P}(L = A) = \mathbb{P}(L = B) = 1/2$ et (ii) $\mathbb{P}(X_i = 1|L = A) = p$, $\mathbb{P}(X_i = 1|L = B) = 1 - p$ (pour $i = 1, 2$). On suppose en outre que : (iii) X_1 et X_2 sont indépendantes conditionnelement à L c'est-à-dire que pour tout $l \in \{A, B\}$ et tout $(x_1, x_2) \in \{0, 1\}^2$ on a $\mathbb{P}(X_1 = x_1 \text{ et } X_2 = x_2|L = l) = \mathbb{P}(X_1 = x_1|L = l)\mathbb{P}(X_2 = x_2|L = l)$.

1. *Que représentent dans le problème les variables aléatoires L, X_1, X_2 et la quantité $\mathbb{P}(X_2 = 1|X_1 = 1)$?*
2. *Calculer en fonction de p les probabilités $\mathbb{P}(X_1 = 1)$ et $\mathbb{P}(X_1 = 1 \text{ et } X_2 = 1)$.*
3. *En déduire $\mathbb{P}(X_2 = 1|X_1 = 1)$.*
4. *Comparer $\mathbb{P}(X_2 = 1|X_1 = 1)$ à $1/2$.*
5. *Construire un espace $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ et des variables aléatoires $L : \Omega \to \{A, B\}$, $X_1, X_2 : \Omega \to \{1, 0\}$ vérifiant les conditions (i), (ii) et (iii).*

Correction

1. La variable aléatoire L représente le choix de la pièce que l'on choisit au hasard de façon équiprobable. Les variables aléatoires X_1 et X_2 représentent les résultats obtenus respectivement lors du premier et du second lancer.
2. On a d'après la formule des causes

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 1|L = A)\mathbb{P}(L = A) + P(X_1 = 1|L = B)\mathbb{P}(L = B).$$

D'après l'énoncé $\mathbb{P}(X_1|L = A) = p$ tandis que $\mathbb{P}(X_1 = 1|L = B) = 1 - p$. Par conséquent $\mathbb{P}(X_1 = 1) = (1/2)(p + (1 - p)) = 1/2$.
De la même manière,

$$\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1|L = A)\mathbb{P}(L = A)+\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1|L = B)\mathbb{P}(L = B).$$

D'après l'énoncé on sait que $\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1|L = *) = \mathbb{P}(X_1 = 1|L = *)\mathbb{P}(X_2 = 1|L = *)$. Cette dernière quantité vaut p^2 ou $(1 - p)^2$ suivant que $* = A$ ou B. Par conséquent,

$$\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) = \frac{1}{2}(p^2 + (1 - p)^2).$$

3. On a
$$\mathbb{P}(X_2 = 1 | X_1 = 1) = \frac{\mathbb{P}(X_2 = 1, X_1 = 1)}{\mathbb{P}(X_1 = 1)}.$$
Par conséquent
$$\mathbb{P}(X_2 = 1 | X_1 = 1) = p^2 + (1-p)^2.$$
4. Cette dernière quantité atteint son minimum (strict) en $p = 1/2$ qui en ce point vaut $1/2$. On a donc pour tout $p \in [0,1]$, $\mathbb{P}(X_2 = 1|X_1 = 1) \geq 1/2$.
5. On choisit $\Omega = \{A, B\} \times \{0,1\}^2$ et pour $\mathcal{B}$ l'ensemble des parties de Ω. Définissons à présent $\mathbb{P}$. Pour cela il suffit de définir ses valeurs sur les singletons (car Ω est fini). On pose
$$\mathbb{P}(\{l, x_1, x_2\}) = \frac{1}{2}\pi(l, x_1)\pi(l, x_2)$$
où $\pi(A, 1) = p$, $\pi(A, 0) = 1 - p$, $\pi(B, 1) = 1 - p$, $\pi(B, 0) = p$.
On pose alors $L(l, x_1, x_2) = l$, $X_1(l, x_1, x_2) = x_1$, $X_2(l, x_1, x_2) = x_2$. On a
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(L = l) &= \mathbb{P}(\{l\} \times \{0,1\}^2) \\ &= \sum_{(x_1,x_2)\in\{0,1\}^2} \frac{1}{2}\pi(l, x_1)\pi(l, x_2) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{x_1=0}^{1} \pi(l, x_1)\right)\left(\sum_{x_2=0}^{1} \pi(l, x_2)\right) \\ &= \frac{1}{2}(p + 1 - p)(p + 1 - p) \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$
ce qui prouve (i). On a en outre
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 = x_1, L = l) &= \sum_{x_2=0}^{1} \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = x_2, L = l) \\ &= \sum_{x_2=0}^{1} \frac{1}{2}\pi(l, x_1)\pi(l, x_2) \\ &= \frac{1}{2}\pi(l, x_1) \sum_{x_2=0}^{1} \pi(l, x_2) \\ &= \frac{1}{2}\pi(l, x_1)(p + 1 - p) \\ &= \frac{1}{2}\pi(l, x_1)\end{aligned}$$
et de même
$$\mathbb{P}(X_2 = x_2, L = l) = \frac{1}{2}\pi(l, x_2).$$
Comme
$$\mathbb{P}(X_1 = x_1 | L = l) = \frac{\mathbb{P}(X_1 = x_1, L = l)}{\mathbb{P}(L = l)}$$

on a donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 = x_1 | L = l) &= \frac{\frac{1}{2}\pi(l, x_1)}{\frac{1}{2}} \\ &= \pi(l, x_1)\end{aligned}$$

et de même

$$\mathbb{P}(X_2 = x_2 | L = l) = \pi(l, x_2).$$

Nous avons donc prouvé (ii).
Démontrons à présent (iii). Par définition

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, L = l) = \frac{1}{2}\pi(l, x_1)\pi(l, x_2)$$

et donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2 | L = l) &= \frac{\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, L = l)}{\mathbb{P}(L = l)} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\pi(l, x_1)\pi(l, x_2)}{\frac{1}{2}} \\ &= \pi(l, x_1)\pi(l, x_2)\end{aligned}$$

On a donc finalement

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, L = l) = \mathbb{P}(X_1 = x_1 | L = l)\mathbb{P}(X_2 = x_2 | L = l).$$

Exercice 2

1. *On suppose que U est une variable aléatoire réelle suivant une loi uniforme sur* $[0, 1]$.
   (a) *Calculer la fonction de répartition de la variable aléatoire $-\ln U$.*
   (b) *En déduire que $-\ln U$ suit une loi exponentielle de paramètre 1.*
   (c) *Pour $\lambda > 0$, déterminer la loi de la variable aléatoire $(-1/\lambda)\ln U$.*
2. *Soient $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi de densité $\rho : \mathbb{R} \to [0, \infty[$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et bornée.*
   (a) *Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire $g(X_1)$ en fonction de g et de ρ. Que dire de l'espérance et de la variance de $g(X_i)$ pour $i \geq 2$?*
   (b) *Exprimer la fonction caractéristique de la v.a.r. $g(X_i)$ en fonction de ρ.*
   (c) *Démontrer que les variables aléatoires $g(X_i)$ admettent toutes la même loi.*
   (d) *On pose $S_n(g) = g(X_1) + \cdot + g(X_n)$. Démontrer que la suite de v.a.r. $S_n(g)/n$ converge presque sûrement vers $\int_{\mathbf{R}} \rho(x)g(x)dx$.*

(e) *Démontrer pour tout $a \geq 0$ l'égalité :*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n(g)}{n} - \int_{\mathbb{R}} \rho(x)g(x)dx\right| \leq \frac{a\sigma(g)}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a} e^{-x^2/2}dx$$

avec $(\sigma(g))^2 = \int_{\mathbb{R}} g^2(x)\rho(x)dx - \left(\int_{\mathbb{R}} g(x)\rho(x)dx\right)^2$.

3. *On suppose à présent que $U_1, \ldots, U_n, \ldots$ est une suite de v.a.r. i.i.d suivant une même loi uniforme sur $[0,1]$ et on pose pour $i \geq 1$, $X_i = -\ln U_i$.*

   (a) *Expliquer pourquoi $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ est une suite de v.a.r. i.i.d et déterminer la densité ρ de leur loi commune.*

   (b) *On pose $f(x) = e^{-x^4}(\sin x)\mathbf{1}_{]0,\infty[}(x)$, $g = f/\rho$ (ρ de la question 3a) et on définit comme dans la question 2 la v.a.r. $S_n(g) = g(X_1) + \cdots + g(X_n)$. Démontrer que pour n assez grand on a avec probabilité supérieure ou égale à 0.95*

$$\int_0^\infty e^{-x^4}\sin x dx \in [\frac{S_n(g)}{n} - \frac{C}{\sqrt{n}}, \frac{S_n(g)}{n} + \frac{C}{\sqrt{n}}]$$

   où $C \approx 1.96e$, e étant la base du logarithme népérien ($e \approx 2,718$). On rappelle que $(2\pi)^{-1/2}\int_{-c}^{c} e^{-t^2/2}dt = 0.95$ pour $c \approx 1.96$

Correction

1. (a) La fonction de répartition F de la variable aléatoire $-\ln U$ est par définition $F_U(t) = \mathbb{P}(-\ln U \leq t)$. Comme ln est une bijection croissante de $]0,\infty[$ sur $\mathbb{R}$ on a $-\ln U \leq t$ si et seulement si $U \geq e^{-t}$ et donc $F(t) = \mathbb{P}(U \geq e^{-t})$. Comme U suit une loi uniforme sur $[0,1]$ elle admet une densité égale à $\mathbf{1}_{[0,1]}$ et donc $F(t) = \int_{e^{-t}}^{\infty} \mathbf{1}_{[0,1]} = (1-e^{-t})\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$.

   (b) La fonction F est continue et dérivable par morceaux. Sa dérivée en dehors du point $t = 0$ vaut $e^{-t}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$. C'est la densité d'une loi exponentielle de paramètre 1. Par conséquent, $-\ln U$ suit une loi exponentielle de paramètre 1.

   (c) Comme $\lambda > 0$, on a $\mathbb{P}((-1/\lambda)\ln U \leq t) = \mathbb{P}(-\ln U \leq \lambda t) = (1-e^{-\lambda t})\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$. La dérivée de cette fonction de répartition en $t \neq 0$ vaut $\lambda e^{-\lambda t}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$. C'est la densité d'une loi exponentielle de paramètre λ. Par conséquent, $(-1/\lambda)\ln U$ suit une loi exponentielle de paramètre λ.

2. (a) D'après la formule de transfert

$$\mathbb{E}(g(X_1)) = \int_{\mathbb{R}} g(x)\rho(x)dx$$

   et

$$\mathbb{E}((g(X_1)^2) = \int_{\mathbb{R}} g^2(x)\rho(x)dx.$$

   Comme $Var(X_1) = \mathbb{E}(X_1^2) - \mathbb{E}(X_1)^2$ on a

$$Var(X_1) = \int_{\mathbb{R}} \rho(x)g^2(x)dx - \left(\int_{\mathbb{R}} \rho(x)g(x)dx\right)^2.$$

   Comme X_i suit la même loi que X_1, leurs espérance et leurs variances sont respectivement les mêmes.

(b) Par définition la fonction caractéristique de $g(X_i)$ est $\mathbb{E}(e^{itg(X_i)})$ et par la formule de transfert cette quantité vaut $\int_{\mathbb{R}} e^{itg(x)}\rho(x)dx$.

(c) La formule précédente montre que les $g(X_i)$ admettent les mêmes fonctions caractéristiques ; elles ont donc la même loi.

(d) On a $\mathbb{E}(|g(X_i)|) = \int_{\mathbb{R}} |g(x)|\rho(x)dx$. Comme $|g|$ est bornée (disons majorée par M) on a $\mathbb{E}(|g(X_i)|) \leq M \int_{\mathbb{R}} \rho(x)dx = M$ car ρ est une densité. Ainsi $\mathbb{E}(|g(X_i)|)$ est finie et $g(X_i)$ est L^1. En outre, les variables aléatoires $g(X_i)$, $i \geq 1$ sont indépendantes car les X_i le sont (théorème du cours) et admettent la même loi. On peut donc appliquer la loi des grands nombres : la suite de v.a.r. $(1/n)(g(X_1) + \cdots g(X_n))$ converge presque-sûrement vers $\mathbb{E}(g(X_1)) = \int_{\mathbb{R}} \rho(x)g(x)dx$.

(e) D'après la question 2a les v.a.r. $g(X_i)$, en plus d'être i.i.d. sont dans $\mathcal{L}^2$ car elles sont de variances finies. On peut donc appliquer le théorème "Central Limit" :

$$\mathbb{P}(\frac{\sqrt{n}}{\sigma(g(X_1))}|\frac{S_n(g)}{n} - \mathbb{E}(g(X_1))| \leq a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} e^{-t^2/2}dt$$

où $\sigma(g(X_1))^2$ est la variance de $g(X_1) = \int_{\mathbb{R}} \rho(x)g^2(x)dx - \left(\int_{\mathbb{R}} \rho(x)g(x)dx\right)^2$.

3. (a) D'après la question 1 les v.a.r. X_i suivent une loi exponentielle de paramètre 1 donc de densité $e^{-x}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$. En outre, comme elles sont de la forme $f(U_i)$ où les U_i sont indépendantes, elles sont également indépendantes.

(b) Appliquons le résultat de la question 2e :

$$\mathbb{P}(\frac{\sqrt{n}}{\sigma(g(X_1))}|\frac{S_n(g)}{n} - \mathbb{E}(g(X_1))| \leq a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} e^{-t^2/2}dt$$

ce qu'on peut écrire

$$\mathbb{P}(\int_{\mathbb{R}} \rho(x)g(x)dx \in [\frac{S_n(g)}{n} - \frac{a\sigma(g)}{\sqrt{n}}, \frac{S_n(g)}{n} + \frac{a\sigma(g)}{\sqrt{n}}]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} e^{-t^2/2}dt$$

soit

$$\mathbb{P}(\int_{\mathbb{R}} f(x)dx \in [\frac{S_n(g)}{n} - \frac{a\sigma(g)}{\sqrt{n}}, \frac{S_n(g)}{n} + \frac{a\sigma(g)}{\sqrt{n}}]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} e^{-t^2/2}dt.$$

Majorons $\sigma(g)$. D'après l'expression obtenue dans la question 2e on a $\sigma(g)^2 \leq \int_{\mathbb{R}} \rho(x)g(x)^2dx$ et comme $g^2\rho = f^2/\rho$, $\sigma(g)^2 \leq \int_0^\infty e^x e^{-2x^4}(\sin x)^2dx$. En utilisant le fait que pour tout $x \geq 0$, $\sin^2 x \leq 1$ et que $2x - 2x^4 \leq 2x(1-x^3) \leq 2$ on obtient que l'intégrande dans l'intégrale précédente est $\leq e^2 \int_0^\infty e^{-x}dx \leq e^2$. Ainsi $\sigma(g) \leq e$. Comme $(2\pi)^{-1/2}\int_{-c}^{c} e^{-x^2}dx > 0.95$ pour $c \approx 1.96$ et que $[\frac{S_n(g)}{n} - \frac{c\sigma(g)}{\sqrt{n}}, \frac{S_n(g)}{n} + \frac{c\sigma(g)}{\sqrt{n}}] \subset [\frac{S_n(g)}{n} - \frac{ce}{\sqrt{n}}, \frac{S_n(g)}{n} + \frac{ce}{\sqrt{n}}]$ on a bien le résultat désiré pour n suffisamment grand avec $C \approx 1.96e$.

Exercice 3

1. *On suppose que Y est une v.a.r. suivant une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ (espérance μ, variance σ^2, densité $(2\pi\sigma^2)^{-1/2}e^{-(t-\mu)^2/2\sigma^2}$). Démontrer qu'il existe une v.a.r. $\tilde{Y}$ suivant une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$ telle que $Y = \sigma\tilde{Y} + \mu$.*
2. *On rappelle que la fonction caractéristique d'une v.a.r. suivant une loi normale centrée réduite est la fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(t) = e^{-t^2/2}$. Que vaut la fonction caractéristique d'une v.a.r. suivant une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$?*
3. *On suppose que pour tout $n \geq 0$ la v.a.r. X_n suit une loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$ (centrée de variance σ_n^2). Démontrer que si la suite de v.a.r. $(X_n)_{n\geq 0}$ converge en loi vers une v.a.r. X alors X suit une loi normale centrée.*

Correction

1. Si on pose $\tilde{Y} = (Y-\mu)/\sigma$ on voit que $\mathbb{E}(\tilde{Y}) = 0$ et $Var(\tilde{Y}) = Var(Y-\mu)/\sigma^2 = Var(Y)/\sigma^2 = 1$. Par ailleurs, pour tout intervalle $I = [a,b]$,
$$\mathbb{P}(\tilde{Y} \in [a,b]) = \mathbb{P}(Y \in [\mu+\sigma a, \mu+\sigma b]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\mu+\sigma a}^{\mu+\sigma b} e^{(t-\mu)^2/(2\sigma^2)} dt$$
et le changement de variables $x = t/\sigma$ montre que
$$\mathbb{P}(\tilde{Y} \in [a,b]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{t^2/2} dt.$$
Ainsi $\tilde{Y}$ suit une loi normale centrée réduite.
2. La fonction caractéristique de $\tilde{Y}$ vaut $\varphi_{\tilde{Y}}(t) = \mathbb{E}(e^{it\tilde{Y}}) = e^{-t^2/2}$ (cours). On a donc $\varphi_Y(t) = \mathbb{E}(e^{it(\sigma\tilde{Y}+\mu)}) = e^{it\mu}\varphi_{\tilde{Y}}(\sigma t) = e^{it\mu}e^{-t^2\sigma^2/2}$.
3. On a $\varphi_{Y_n}(t) = e^{-t^2\sigma_n^2/2}$. Comme les Y_n convergent en loi vers Y on a (cours) que $\varphi_{Y_n}(t)$ converge vers $\varphi_Y(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On a donc $\varphi_Y(t) = \lim_{n\to\infty} e^{-t^2\sigma_n^2/2}$. En particulier pour $t = 1$, on a $\lim_{n\to\infty} e^{-\sigma_n^2/2} = \varphi_Y(1)$ et en passant au logarithme $\lim_{n\to\infty} \sigma_n^2 = -\ln \varphi_Y(1)$. Si on note σ^2 cette limite, on voit ainsi que pour tout t, $\varphi_Y(t) = \lim_{n\to\infty} e^{-t^2\sigma_n^2/2} = e^{-t^2\sigma^2/2}$. C'est la fonction caractéristique d'une loi normale centrée $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$, donc (la fonction caractéristique caractérise la loi) Y suit une loi $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$.