Lycée Condorcet **2015-2016**
MPSI2

Trigonométrie

Propriétés des fonctions trigonométriques

1) La fonction $\cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est 2π-périodique et paire,
2) La fonction $\sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est 2π-périodique et impaire,
3) La fonction $\tan = \dfrac{\sin}{\cos}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left(\dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right) = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$; elle est π-périodique et impaire.

Formule clée

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, *i.e.* $\cos^2 + \sin^2 = 1$.
Corollaire : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left(\dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$, $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, *i.e.* $1 + \tan^2 = \dfrac{1}{\cos^2}$.

Angles remarquables

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1
$\sin x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0
$\tan x$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	$\times$	0

Équations trigonométriques

1) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\cos(x) = \cos(y)$ si et seulement si $x = y\ [2\pi]$ ou $x = -y\ [2\pi]$,
2) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\sin(x) = \sin(y)$ si et seulement si $x = y\ [2\pi]$ ou $x = \pi - y\ [2\pi]$,
3) Pour tout $(x, y) \in \left(\mathbb{R} \setminus \left(\dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)\right)^2$, $\tan(x) = \tan(y)$ si et seulement si $x = y\ [\pi]$.

Formulaire

Pour tous réels a, b, p et q, on a, sous réserve d'existence, les formules suivantes.

Symétries

$$
\begin{array}{rclrclrcl}
\cos(-a) & = & \cos a & \sin(-a) & = & -\sin a & \tan(-a) & = & -\tan a \\
\cos(\pi - a) & = & -\cos a & \sin(\pi - a) & = & \sin a & \tan(\pi - a) & = & -\tan a \\
\cos(\pi + a) & = & -\cos a & \sin(\pi + a) & = & -\sin a & \tan(\pi + a) & = & \tan a \\
\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - a\right) & = & \sin a & \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - a\right) & = & \cos a & \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - a\right) & = & 1/\tan a \\
\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + a\right) & = & -\sin a & \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + a\right) & = & \cos a & \tan\left(\dfrac{\pi}{2} + a\right) & = & -1/\tan a
\end{array}
$$

Image d'une somme

$$
\begin{array}{rclrcl}
\cos(a + b) & = & \cos a \cos b - \sin a \sin b & \cos(a - b) & = & \cos a \cos b + \sin a \sin b \\
\sin(a + b) & = & \sin a \cos b + \sin b \cos a & \sin(a - b) & = & \sin a \cos b - \sin b \cos b \\
\tan(a + b) & = & \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} & \tan(a - b) & = & \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}
\end{array}
$$

Duplication

$$
\begin{array}{rclclcl}
\cos(2a) & = & \cos^2 a - \sin^2 a & = & 2\cos^2 a - 1 & = & 1 - 2\sin^2 a \\
\sin(2a) & = & 2 \sin a \cos a & & & & \\
\tan(2a) & = & \dfrac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a} & & & &
\end{array}
$$

Linéarisation

$$
\cos^2 a = \frac{1 + \cos(2a)}{2} \qquad \sin^2 a = \frac{1 - \cos(2a)}{2}
$$

Transformation de produits en sommes

$$\begin{aligned}
\cos a \cos b &= \frac{1}{2}\left(\cos(a+b)+\cos(a-b)\right)\\
\sin a \sin b &= \frac{1}{2}\left(\cos(a-b)-\cos(a+b)\right)\\
\sin a \cos b &= \frac{1}{2}\left(\sin(a+b)+\sin(a-b)\right)
\end{aligned}$$

Transformation de sommes en produits

$$\begin{aligned}
\cos p+\cos q &= 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}\\
\cos p-\cos q &= -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}\\
\sin p+\sin q &= 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}\\
\sin p-\sin q &= 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}
\end{aligned}$$

Tangente de l'angle moitié

En posant $t=\tan\left(\frac{a}{2}\right)$:

$$\cos a=\frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin a=\frac{2t}{1+t^2} \qquad \tan a=\frac{2t}{1-t^2}.$$