À REMETTRE JEUDI 24 SEPTEMBRE

DM 2

Exercice 1

1) Décrire géométriquement l'application f du plan dans le plan représentée par l'application $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \mathrm{i}z+2 \end{array}$.

   On explicitera en particulier les coordonnées du centre de f.

2) Soit $(a,b) \in {\mathbb{C}^*}^2$. On considère E l'ensemble des points d'affixes $a+be^{\mathrm{i}\theta}$, lorsque θ décrit $\mathbb{R}$.

   a) Donner une description géométrique de E.

   b) Déterminer, en justifiant avec soin votre réponse, la valeur maximale m de $\left|a+be^{\mathrm{i}\theta}\right|$ lorsque θ décrit $\mathbb{R}$ (on pourra deviner m en faisant un dessin, puis justifier rigoureusement que la valeur trouvée est effectivement m).

Exercice 2

1) Déterminer les $z \in \mathbb{C}$ tels que :
$$e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z} = 1.$$

2) Résoudre l'équation $z^3 - (2+\mathrm{i})z^2 + 2(1+\mathrm{i})z - 2\mathrm{i} = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation $1 + z^n + z^{2n} = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 3

Soit a, b, c, d quatre complexes deux à deux distincts. On pose $\alpha = \dfrac{d-a}{b-c}$ et $\beta = \dfrac{d-b}{c-a}$.

1) On suppose que α et β sont imaginaires purs. Montrer que $\gamma = \dfrac{d-c}{a-b}$ est aussi imaginaire pur, en exprimant ce quotient à l'aide de α et β.

   Indication : on pourra exprimer γ en fonction de $1+\alpha\beta$ et $\alpha+\beta$.

2) Donner une interprétation géométrique de la question précédente.