**Nombres complexes**

---

# Retour sur le cours

1. Montrer que pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, les propriétés suivantes sont vérifiées
   (a) $\overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}$
   (b) $z \in \mathbb{R}$ ssi $z = \overline{z}$
   (c) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$
   (d) $z \cdot \overline{z} \in \mathbb{R}$
   (e) $|\overline{z}| = |z|$
   (f) $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$
   (g) $\mathrm{Re}(z) \leqslant |z|$ et $\mathrm{Im}(z) \leqslant |z|$
   (h) $\arg(z \cdot z') = \arg(z) + \arg(z') \mod 2\pi$
   *Indication* : Rappeler les formules exprimant $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$ en fonction de $\cos a, \cos b, \sin a, \sin b$.
2. Démontrer par récurrence sur $n$ la formule du binôme : pour tous $x, y \in \mathbb{C}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$
   *Indication* : (Re)démontrer que pour tous entiers $n, k$ tels que $0 < k < n$, on a $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ (formule de Pascal).

# Exercices

1. Soient $z_1 = 2\sqrt{6}(1+i)$ et $z_2 = \sqrt{2}(1+i\sqrt{3})$.
   (a) Déterminer les formes exponentielles et trigonométriques de $z_1$ et $z_2$.
   (b) Déterminer la forme cartésienne de $z = \frac{z_1}{z_2}$.
   (c) Calculer les formes exponentielle et trigonométrique de $z$.
   (d) En déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.
2. Déterminer les nombres complexes $z$ tels que $z^2 + \overline{z} + 1$ est réel.
3. Déterminer les nombres complexes $z$ tels que $z^2 + \overline{z} - 1 = 0$.
4. Déterminer les nombres complexes $z$ tels que $z^2 - 2\overline{z} + 1 = 0$.
5. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer
$$(1+i)^n + (1-i)^n \text{ et } (1+i)^n - (1-i)^n.$$
6. Soient $z_1 = \frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2}$, $z_2 = 1-i$, $z = \frac{z_1}{z_2}$. Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes $z_1, z_2, z$. En déduire
$$\cos\frac{5\pi}{12} \text{ et } \sin\frac{5\pi}{12}.$$

7. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(-4-2i)z^2+(7-i)z+1+3i=0$.
8. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2+(1+4i)z-5-i=0$.
9. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-3(i+1)z+4i=0$.
10. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-(1-i)z-2+i=0$.
11. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2+(1+4i)z-5-i=0$.
12. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\frac{1}{2}z^2+2\sqrt{2}\,z+3+i=0$.
13. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4-(2+i)z^2+1+i=0$. On pourra commencer par résoudre l'équation $Z^2-(2+i)Z+1+i=0$
14. Déterminer tous les nombres complexes $z$ tels que
$$z^5 = 16 - 16\,\mathrm{i}\,\sqrt{3}.$$
15. Déterminer tous les nombres complexes $z$ tels que :
$$z^7 = 64\sqrt{3}+64i.$$
16. Calculer les racines quatrièmes de $1+i\sqrt{3}$. En déduire les valeurs de $\cos\frac{13\pi}{12}$ et $\sin\frac{13\pi}{12}$.
17. Calculer $\cos(4\theta)$ et $\sin(4\theta)$.
18. Linéariser $\cos^5\theta$ et $\sin^5\theta$.
19. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations $z^5+1=0$ et $z^6=\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$.
20. Soient $\theta\in]0,\pi[$ et $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{k=0}^{n}\sin(k\theta)$
21. Soit $z\in\mathbb{S}^1$. Montrer que $|1+z|\geqslant 1$ ou $|1+z^2|\geqslant 1$. Puis donner une interprétation géométrique de ces deux inégalités.
22. Dans cet exercice, $\alpha$ désigne un nombre réel tel que $\cos(\alpha)\neq 0$.
    (a) Rappeler les définitions du module et d'un argument d'un nombre complexe $z\neq 0$.
    (b) Ecrire sous forme exponentielle le nombre complexe $-i$.
    (c) Ecrire sous forme exponentielle le nombre complexe $z_0$ donné par :
    $$z_0 = \frac{1+i\,\tan(\alpha)}{1-i\,\tan(\alpha)}.$$
    (d) Trouver les nombres réels $\alpha$ vérifiant l'équation :
    $$\left(\frac{1+i\,\tan(\alpha)}{1-i\,\tan(\alpha)}\right)^2 = -i.$$
23. On considère les équations suivantes d'inconnue $z\in\mathbb{C}$ :
$$E\ :\ z^5+1=0 \qquad E'\ :\ z^4+\overline{z}=0$$
    (a) Ecrire $-1$ sous forme polaire.
    (b) Résoudre l'équation $(E)$ dans $\mathbb{C}$.
    (c) Soit $z$ une solution **non nulle** de $(E')$, montrer que $|z|=1$, puis que $z$ est solution de $(E)$.

(d) Réciproquement, montrer que les solutions de l'équation $(E)$ sont solutions de $(E')$.

(e) Finalement résoudre l'équation $(E')$ dans $\mathbb{C}$.

24. (a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$ : $Z^2 + 1 = 0$.

 (b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ : $(z^2 + z + 1)^2 + 1 = 0$.

25. On se propose de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ :

$$z^3 - (3 + 4i)z^2 + (1 + 11i)z - 10i + 10 = 0.$$

 (a) Chercher d'abord une solution imaginaire pure $z = iy$ avec $y \in \mathbb{R}$.

 (b) Montrer que

$$z^3 - (3+4i)z^2 + (1+11i)z - 10i + 10 = (z - 2i)\big(z^2 - (3+2i)z + 5 + 5i\big).$$

 (c) Finalement calculer toutes les solutions de

$$z^3 - (3 + 4i)z^2 + (1 + 11i)z - 10i + 10 = 0.$$

26. (a) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ :

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 = 0.$$

 *Indication* : observer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$(1 - z)(1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6) = 1 - z^7.$$

 (b) Soit $w$ une solution quelconque de l'équation $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 = 0$. Vérifier que $1 + w^{2k} \neq 0$ pour $k = 1, 2, 3$, puis que

$$w^7 = 1, \quad w^8 = w, \quad w^9 = w^2, \quad w^{10} = w^3, \quad w^{11} = w^4, \quad w^{12} = w^5.$$

 (c) Notons encore $w$ une solution quelconque de l'équation $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 = 0$. En utilisant la question précédente, démontrer que

$$\frac{w}{1 + w^2} + \frac{w^2}{1 + w^4} + \frac{w^3}{1 + w^6} = -2.$$

 (d) Déduire de la question précédente la valeur de

$$\frac{1}{\cos\frac{2\pi}{7}} + \frac{1}{\cos\frac{4\pi}{7}} + \frac{1}{\cos\frac{6\pi}{7}}.$$

 *Indication* : observer que

$$\frac{w}{1 + w^2} + \frac{w^2}{1 + w^4} + \frac{w^3}{1 + w^6} = \frac{1}{w + w^{-1}} + \frac{1}{w^2 + w^{-2}} + \frac{1}{w^3 + w^{-3}}.$$