Université Denis Diderot (Paris 7) **MM1**
Mathématiques **25 novembre 2013**

Fonctions dérivables

Exercice 1 Considérons la fonction f définie par

$$f(0) = 0 \text{ et } f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0.$$

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer la dérivée de f puis montrer que f' n'est pas continue en 0.

Exercice 2 Fonctions circulaires réciproques.

1. Rappeler la définition des fonctions réciproques arctan, arcsin et arccos. En utilisant le théorème de dérivabilité de la fonction réciproque d'une fonction bijective dérivable, calculer les fonctions dérivées de arctan, arcsin et arccos.
2. Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$, on a
$$\arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x.$$
3. Calculer
$$\arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Exercice 3 Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \arctan \frac{1+x}{1-x} \text{ si } x \neq 1 \text{ et } f(1) = -\frac{\pi}{2}.$$

1. Etudier la continuité de f.
2. Montrer que f est dérivable en tout $x \neq 1$ mais n'est pas dérivable en 1.
3. Montrer que f' a une limite finie quand x tend vers 1.
4. Montrer que
$$\forall x > 1, \quad \arctan \frac{1+x}{1-x} = \frac{\pi}{4} + \arctan x.$$

Exercice 4 Soit $a = \sqrt[3]{\pi/2}$. On considère la fonction $f :]-a, a[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in]-a, a[\quad f(x) = \tan(x^3).$$

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f. Calculer la dérivée de f.
2. Etudier les variations de f.
3. On note $I =]-a, a[$.
   Calculer $J = f(I)$. Pourquoi J est-il nécessairement un intervalle ?
4. Démontrer que f admet une fonction réciproque notée g en précisant le domaine de définition de g et son image.
5. Etudier la dérivabilité de g et exprimer $g'(t)$ en fonction de t et de $g(t)$.

Exercice 5 Soit $I =]a, b[$ avec $a < b$. Considérons $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable (c'est-à-dire dérivable et dont la fonction dérivée est elle-même dérivable) telle que

$$\forall x \in I, \quad f'(x) \neq 0.$$

1. Montrer que f est strictement monotone sur $]a, b[$. En déduire $f(]a, b[)$.
2. On note $J = f(]a, b[)$. Montrer que f réalise une bijection de I sur J.
3. Montrer que la fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$ est deux fois dérivable et calculer ses dérivées première et seconde.

Exercice 6

1. Etudier les variations de la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ après avoir précisé son domaine de définition ainsi que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \text{ et } \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{x}.$$

2. Déduire de la question précédente, le nombre de solutions de l'équation

$$e^{ax} - x = 0 \text{ pour } a \in \mathbb{R}.$$

3. On considère, pour tout $a \in \mathbb{R}$, la suite $\left(s_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence de la façon suivante :

$$s_0 = 1 \text{ et } s_{n+1} = e^{as_n} \text{ pour } n \geqslant 0.$$

   Montrer que si $\left(s_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, alors ℓ est solution de l'équation $e^{ax} - x = 0$.
4. Montrer que, si $a > 0$, alors $\left(s_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
5. Montrer que, si $0 \leqslant a \leqslant e^{-1}$, alors

$$s_n \leqslant e \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

6. Pour quelles valeurs de $a \geqslant 0$, la suite $\left(s_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Exercice 7 On considère la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$F(x) = e^x + e^{-x} + 2.$$

1. La fonction F est-elle paire ou impaire ? Justifier votre réponse.
2. Après avoir justifié la continuité et la dérivabilité de F, étudier ses variations. Puis, déterminer $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{F(x)}{x}$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x}$.

On note f la restriction de F à l'intervalle $[0, +\infty[$.

3. Montrer que l'application f est une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[4, +\infty[$ et que l'application réciproque $f^{-1} : [4, +\infty[\to [0, +\infty[$ est continue.
4. Montrer que l'application réciproque f^{-1} est dérivable sur $]4, +\infty[$. Est-elle dérivable en 4 ?
5. Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$: $f'(x) = \sqrt{f(x)\big(f(x) - 4\big)}$.

6. En déduire que la dérivée $(f^{-1})'$ de f^{-1} vérifie pour tout $y > 4$:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{\sqrt{y(y-4)}}$$

Exercice 8 Considérons la fonction $g : x \mapsto \frac{3-x^2}{2}$, et soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On définit la suite récurrente $\big(s_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$s_0 = x_0 \text{ et } s_{n+1} = g(s_n) \text{ si } n \geqslant 0.$$

1. Calculer $f = g \circ g$, puis exprimer $f(x) - x$ comme un produit de monômes.
2. Montrer que
$$\forall x \in [-1, 1], \quad x \leqslant f(x) \leqslant 1.$$
3. Montrer que
$$\forall x \in [1, 3/2], \quad 1 \leqslant f(x) \leqslant x.$$
4. On suppose que $x_0 \in [-1, 1]$. Etudier les suites de termes généraux $u_n = s_{2n}$ et $u'_n = s_{2n+1}$
5. Etudier la convergence de la suite $\big(s_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 9 On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{x}$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence :

$$\left[\begin{array}{l} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n)\,. \end{array}\right.$$

On note $I = [1, 2]$.

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur I. Dresser le tableau de ses variations sur I.
2. Montrer que, pour tout $x \in I$, $f(x) \in I$ et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est définie et appartient à I.
3. Montrer avec soin que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors sa limite l appartient à I et vérifie $f(l) = l$.
4. En déduire que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors sa limite est $\sqrt{2}$.
5. Montrer, à l'aide de l'inégalité des accroissements finis, que
$$\text{pour tous } x \text{ et } y \text{ dans } I,\ |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{2}\,|x - y|$$
6. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leqslant \dfrac{1}{2}\left|u_n - \sqrt{2}\right|$.
7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\left|u_n - \sqrt{2}\right| \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}$.
8. Que peut-on en conclure pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
9. Comment obtenir, à l'aide des résultats précédents, une approximation de $\sqrt{2}$ par un nombre rationnel avec une erreur inférieure à 10^{-2} ?

Exercice 10 Soit f une fonction dérivable sur $]0,1[$. On suppose que

$$\forall x \in]0,1[, \quad |f'(x)| < 1.$$

Considérons une suite $\left(s_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $]0,1[$ telle que $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$. On pose $t_n = f(s_n)$.

1. Montrer que la suite $\left(t_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2. En déduire que f a une limite au point 0.

Exercice 11 Montrer que pour tout $x \in [0, \pi/2]$, on a

$$\left|1 - \frac{x^2}{2} - \cos(x)\right| \leqslant \frac{x^4}{24}$$