TP n° 2. Convergence de variables aléatoires

La loi des grands nombres

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, à partir de laquelle on définit :

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Alors, lorsque $n \to +\infty$, on a p.s. :

— si $\mathbb{E}[|X_1|] < +\infty$, alors $Y_n \to \mathbb{E}[X_1]$;

— si $\mathbb{E}[|X_1|] = +\infty$, alors $(Y_n)_{n\geq 1}$ est non bornée.

Exercice 1. Loi de Bernoulli. On considère le cas où les X_n suivent une loi de Bernoulli de paramètre p.

a) Écrire un programme `LGNbern` qui prend en argument un entier n et un paramètre p, simule une réalisation de $(X_k)_{1\leq k\leq n}$, et renvoie la liste $[Y_1,\dots,Y_n]$.

b) Afficher 5 réalisations de $(Y_k)_{1\leq k\leq n}$ pour $p = 0.3$ et $n = 100$; puis $n = 1\,000$; puis $n = 10\,000$.

Exercice 2. Loi exponentielle. On considère le cas où les X_n suivent une loi exponentielle de paramètre a. (On rappelle qu'on peut la simuler par $-\frac{1}{a}\ln U$ où U suit la loi uniforme sur $[0,1]$.)

a) Écrire un programme `LGNexpo` qui prend en argument un entier n et un paramètre a, simule une réalisation de $(X_k)_{1\leq k\leq n}$, et renvoie la liste $[Y_1,\dots,Y_n]$.

b) Afficher 5 réalisations de $(Y_k)_{1\leq k\leq n}$ pour $a = 0.6$ et $n = 100$; puis $n = 1\,000$; puis $n = 10\,000$.

Exercice 3. Loi de Cauchy. On considère le cas où les X_n suivent une loi de Cauchy. (On rappelle qu'on peut la simuler par $\tan(\pi U)$ où U suit la loi uniforme sur $[0,1]$.)

a) Écrire un programme `LGNcauchy` qui prend en argument un entier n, simule une réalisation de $(X_k)_{1\leq k\leq n}$, et renvoie la liste $[Y_1,\dots,Y_n]$.

b) Afficher 5 réalisations de $(Y_k)_{1\leq k\leq n}$ pour $n = 100$; puis $n = 1\,000$; puis $n = 10\,000$.

Exercice 4. Méthode de Monte-Carlo. On peut utiliser la loi des grands nombres pour estimer

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^3}\,dx.$$

a) Remarquer que cette intégrale est $\mathbb{E}[X_1]$, où $X_1 = \sqrt{1+U^3}$, avec $U \sim \mathscr{U}([0,1])$. On considère donc une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ où $X_n = \sqrt{1+U_n^3}$ avec $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$.

b) Écrire un programme `Integrale` qui prend en argument un entier n, simule une réalisation de $(X_k)_{1\leq k\leq n}$, et renvoie $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

c) Tester `Integrale(10000)`, et en déduire une approximation de $\int_0^1 \sqrt{1+x^3}\,dx$.

Le théorème central limite

On rappelle le théorème : si $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi telles que $\mathbb{E}[X_1^2] < +\infty$, alors si on note $m = \mathbb{E}[X_1]$ et $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1)$, la variable

$$Z_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - nm}{\sigma\sqrt{n}}$$

converge en loi vers la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Exercice 5. On condière le cas où les X_n suivent une loi uniforme sur $[2,3]$.

a) Écrire un programme `Simul` qui prend en argument un entier n et qui renvoie une liste de 10 000 simulations de $X_1 + \cdots + X_n$.

b) Afficher sur la même figure un histogramme de `Simul`(n) pour $n = 1, 2, ..., 12$.

Exercice 6. On considère le cas où les X_n suivent une loi uniforme sur $[0,1]$. (On rappelle qu'ici $m = 1/2$ et $\sigma^2 = 1/12$.) Stocker $k = 10\,000$ réalisations de Z_{100} dans un vecteur $\mathbf{v}$, et réaliser un histogramme de $\mathbf{v}$ auquel on superposera la densité théorique $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$.

Pour aller plus loin

Exercice 7. Série alternée aléatoire. On souhaite étudier la convergence de la série

$$S_n = \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{i},$$

où $(X_i)_{i\geq 1}$ est une suite de v.a. indépendantes et de même loi, de loi $\mathbb{P}(X_1 = +1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$.

a) Écrire un programme `Somme` qui prend en argument un entier n, simule une réalisation de $(X_k)_{1\leq k\leq n}$, et renvoie la liste $[S_1, \ldots, S_n]$.

b) Afficher 8 réalisations de $(S_k)_{1\leq k\leq n}$ pour $n = 100$; $n = 1\,000$; $n = 10\,000$. Que pouvez-vous conjecturer ?

Exercice 8. Urne de Polya. Une urne contient initialement une boule noire et une boule blanche. On considère le processus suivant : à chaque tour, une boule est tirée dans l'urne au hasard, et on la replace dans l'urne en ajoutant une autre boule de la même couleur. On note B_n le nombre de boules blanches dans l'urne après n tours ($B_0 = 1$), et on cherche à étudier $W_n = \frac{B_n}{n+2}$ la proportion de boules blanches dans l'urne après n tours.

a) Écrire un programme `Polya` qui prend en argument un entier n, et renvoie une réalisation de $[W_0, \ldots, W_n]$.

b) Afficher 8 réalisations de $(W_k)_{1\leq k\leq n}$ pour $n = 100$; $n = 1\,000$; $n = 10\,000$. Que pouvez-vous conjecturer ?

c) Stocker $k = 10\,000$ réalisations de W_{200} dans un vecteur $\mathbf{v}$ et afficher un histogramme de $\mathbf{v}$. Que pouvez-vous conjecturer ?

d) Recommencer dans le cas où l'urne contient initialement a boules blanches et b boules noires : écrire un programme `Polya2` qui prend en argument un entier n et deux entier a, b et qui renvoie une réalisation de $[W_0, \ldots, W_n]$; afficher 8 réalisations de $(W_k)_{1\leq k\leq n}$ pour $n = 1\,000$; réaliser un histogramme de 10 000 réalisations de W_{200} et le comparer à la densité $f(x) = \frac{(a+b-1)!}{(a-1)!(b-1)!} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$.