Sorbonne Université — Licence de Mathématiques L2

UE 2M231 – Probabilités élémentaires — Année 2017–2018

Série d'exercices n° 5. Variables aléatoires réelles

Exercice 5.1. Déterminer la constante c de sorte que les fonctions suivantes soient des densités de probabilité sur $\mathbb{R}$:

a) $\rho(x) = c\,1_{[a,b]}(x)$ où $a < b$ sont deux réels ;

b) $\rho(x) = c\,e^{-ax}\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$ où a est un réel strictement positif ;

c) $\rho(x) = \frac{c}{1+x^2}$.

⋆ **Exercice 5.2.** Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \leq 0 \\ 1 - e^{-x/2}\left(1 + \frac{x}{2}\right) & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Montrer que F est la fonction de répartition d'une loi de probabilité dont on déterminera la densité si elle existe.

Exercice 5.3. Soit X une variable aléatoire réelle suivant la loi exponentielle de paramètre $\theta > 0$. Pour quelles valeurs de $r \geq 0$ l'espérance $\mathbb{E}[|X|^r]$ est-elle finie ? Même question si la variable X admet la densité $\rho(x) = \dfrac{c}{1+x^2}$ (pour une valeur de c que l'on aura précisée dans l'exercice précédent).

Exercice 5.4. Montrer qu'une v.a. X est indépendante d'elle-même si et seulement si elle est p.s. constante :

a) en la supposant de carré intégrable et en calculant $\mathrm{Var}\,(X)$,

b) plus généralement en déterminant sa fonction de répartition.

⋆ **Exercice 5.5.** Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 4]$.

a) Déterminer la loi et l'espérance de $Y = -4X + 3$.

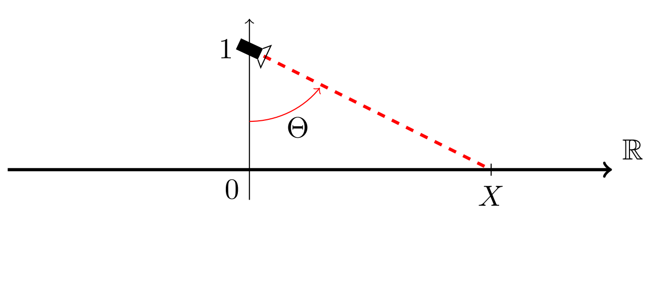
b) Déterminer la loi et l'espérance de $Z = X^2$.

Exercice 5.6. Soit X une variable aléatoire telle que X et $2X$ ont même fonction de répartition. Donner une équation satisfaite par la fonction de répartition de X et en déduire sa loi.

Exercice 5.7. Rappeler la densité de la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Soit $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, quelle est la loi de $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$? Calculer $\mathbb{E}[e^{\lambda Y}]$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, et en déduire $\mathbb{E}[e^{\lambda X}]$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

⋆ **Exercice 5.8.** Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$. Quelle est la loi de $-\frac{1}{a}\log U$ pour $a > 0$?

⋆ **Exercice 5.9.** On suspend un laser à 1 m au dessus du sol. L'angle qu'il forme avec la verticale est aléatoire, notée Θ, et suit la loi uniforme sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. On note X le point marqué au sol par le laser (voir la Figure ci-dessous). Donner la densité de la loi de X.



Exercice 5.10. Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs dans l'intervalle réel $]0, \pi/2[$ de densité f_X et soit $Y = \sin(X)$. On suppose que Y suit une loi uniforme sur $]0, 1[$. Quelle est la densité de X ?

Exercice 5.11. Soit X une v.a. réelle de fonction de répartition F. Trouver en fonction de F les fonctions de répartition de X^3, $\exp(X)$, X^2 $[X]$, (où $[X]$ est la partie entière de X).

⋆ **Exercice 5.12.** Soient X_1 et X_2 deux v.a. indépendantes de même loi uniforme sur $[0, 1]$. Déterminer les loi des v.a. $U = \min(X_1, X_2)$ et $V = \max(X_1, X_2)$. En déduire les densités de probabilité correspondantes. Que vaut $\mathbb{E}(|X_1 - X_2|)$?

Exercice 5.13. Soit X une variable aléatoire positive de densité $f(x)$. Montrer que $E[X] = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > t)\mathrm{d}t$.
Remarque : cette formule est valable même si X n'est pas à densité (pourvu que $X \geq 0$).

Exercice 5.14. Soit X et Y des variables aléatoires indépendantes, chacune suivant une loi exponentielle de paramètres respectifs λ et μ. Déterminer les lois de $\min(X, Y)$ et $\max(X, Y)$.

⋆ **Exercice 5.15.** *(Absence de mémoire de la loi exponentielle)* Soit X une v.a. réelle.

a) Montrer que si X suit une loi exponentielle, pour tous réels $x, h \geq 0$ on a

$$\mathbb{P}(X > x + h \mid X > x) = \mathbb{P}(X > h). \tag{1}$$

b) Supposons que l'égalité (1) ci-dessus soit satisfaite pour tous réels $x, h \geq 0$. Déterminer la fonction de répartition de X, puis sa loi.

Exercice 5.16. Soient X et Y deux variables indépendantes. Donner la loi de $X + Y$ quand :

a) X et Y sont deux variables géométriques, de paramètre (commun) θ ;
b) X et Y suivent la loi uniforme sur $[0, 1]$;
c) $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma_1^2)$ et $Y \sim \mathcal{N}(0, \sigma_2^2)$.

⋆ **Exercice 5.17.** Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes, de loi uniforme sur $[0, 1]$. Déterminer la loi de $Z = XY$.

Exercice 5.18. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. X suit une loi uniforme sur $[0, 1]$ et Y une loi exponentielle de paramètre 1. Calculer la loi de $\frac{Y}{X}$.

☹ **Exercice 5.19.** Soient $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. (indépendantes identiquement distribuées). On suppose que X_1 admet une densité.

a) Montrer que pour tout $i \neq j$, $\mathbb{P}(X_i = X_j) = 0$.
b) En déduire que $\mathbb{P}(X_1 \leq X_2 \leq \ldots \leq X_n) = \mathbb{P}(X_1 < \cdots < X_n)$, et calculer cette quantité.
c) Calculer $\mathbb{P}(X_n > \max_{1\leq i\leq n-1} X_i)$.