Série d'exercices n° 3. Probabilité conditionnelle et indépendance

⋆ **Exercice 3.1.** *(Faux positifs)* Une maladie M affecte une personne sur 1000 dans une population donnée. Un test sanguin permet de détecter cette maladie avec une fiabilité de 99% (lorsque cette maladie est effectivement présente). En revanche, pour un individu sain, la probabilité que le test soit positif est de $0,1\%$ (on dit que $0,1\%$ est le taux de faux positifs).

a) Un patient fait le test, qui est positif. Quelle est la probabilité (conditionnelle) que l'individu soit réellement malade ?

b) Le même patient refait le test, qui est de nouveau positif. Quelle est la probabilité que l'individu soit malade ?

Exercice 3.2. On propose un QCM à un étudiant : 5 réponses possibles sont proposées. L'étudiant connaît (et donne) la bonne réponse avec probabilité p, et s'il ne la connaît pas, il choisit une des 5 possibilité au hasard.

a) Quelle est la probabilité que la réponse donnée par l'étudiant soit la bonne ?

b) Le correcteur, une fois la copie en main, voit que l'étudiant a donné la bonne réponse. Quelle est la probabilité que l'étudiant connaissait en effet la bonne réponse ?

Exercice 3.3. Un document a été perdu. La probabilité pour qu'il se trouve dans un meuble est p, $(0 < p < 1)$. Ce meuble comporte sept tiroirs. Dans le cas où le document est dans le meuble, il se trouve avec même probabilité dans chacun des sept tiroirs. On explore six tiroirs sans trouver le document. Quelle est la probabilité de le trouver dans le septième ?

Exercice 3.4. On lance une pièce et un dé, tous deux non truqués. On note P, F les résultats de la pièce et $1, \dots, 6$ les résultats du dé.

a) Proposer un espace probabilisé modélisant cette expérience.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit A_n l'événement “le résultat du dé est divisible par n”. Calculer $\mathbb{P}(A_2)$, $\mathbb{P}(A_4)$, $\mathbb{P}(A_2 \cap A_4)$ et $\mathbb{P}(A_2 \cup A_4)$. Les événements A_2 et A_4 sont-ils indépendants ?

c) Mêmes questions avec les événements “obtenir pile et au moins 2” et “pile et un nombre pair”.

Exercice 3.5. Que peut-on dire d'un événement qui est indépendant de lui-même ?

⋆ **Exercice 3.6.** Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

a) Soit A et B deux éléments de $\mathcal{F}$ qu'on suppose indépendants. Montrer que A est indépendant de B^c. Montrer que A^c est indépendant de B^c.

b) Soit A et B deux éléments de $\mathcal{F}$ disjoints. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour qu'ils soient indépendants.

c) Donner une condition nécessaire et suffisante sur $A \in \mathcal{F}$ pour qu'il soit indépendant de tout $B \in \mathcal{F}$.

☺ **Exercice 3.7.** Un chimpanzé tape à la machine à écrire en appuyant chaque seconde sur une touche choisie au hasard. Quelle est la probabilité qu'il parvienne à écrire *Hamlet* (pas forcément du premier coup), c'est-à-dire qu'à un certain moment il écrive d'une traite le texte de cette pièce ?