Série d'exercices n$^{\text{o}}$ 1. Ensembles, dénombrement et dénombrabilité

Théorie des ensembles

Exercice 1.1. On possède un ensemble de lettres, un alphabet, que l'on note $A = \{a_1, \cdots, a_m\}$.

a) Comment interprète-t-on l'ensemble $A^n = A \times \cdots \times A$ (n fois) ?

b) Écrire l'ensemble des mots constitués de lettres de A à partir des ensembles A^n en utilisant les opérations usuelles sur les ensembles.

Exercice 1.2. Pour un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$, on note E_Q l'ensemble des zéros de Q : $E_Q = \{x \in \mathbb{C}; Q(x) = 0\}$.

a) Que vaut $\mathrm{Card}(E_Q)$?

b) Comment s'appelle l'ensemble $\mathcal{A} = \bigcup_{Q\in\mathbb{Z}[X]} E_Q$?

c) L'union précédente est-elle disjointe ?

⋆ **Exercice 1.3.** On considère l'ensemble $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeur dans $\mathbb{R}$.

a) Décrire avec des mots, sans utiliser *il existe* ni *pour tout*, les sous-ensembles de E suivants :
$A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\{u \in E\,; u_n \in \{0,1\}\}$;
$B = \bigcap_{M\in\mathbb{R}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{m\geq n}\{u \in E\,; u_m \geq M\}$;
$C = \bigcup_{M\in\mathbb{R}} \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\{u \in E\,; u_n \geq M\}$.

b) Réciproquement, faire l'opération de traduction inverse pour les parties suivantes de E :
F l'ensemble des suites stationaires ;
G l'ensemble des suites qui convergent.

⋆ **Exercice 1.4.** Soit A, B, C des parties d'un ensemble E. Pour chacune des fonctions suivantes, dire si elle est la fonction indicatrice d'une partie de E, et si oui, préciser laquelle :

a) $\mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B$, *b)* $\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B$, *c)* $|\mathbb{1}_A-\mathbb{1}_B|$, *d)* $\mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B-\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B$, *e)* $\max(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)$, *f)* $\min(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)$.

⋆ **Exercice 1.5.** Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des parties d'un ensemble E.

a) Montrer que

$$\mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^n A_i} = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - \mathbb{1}_{A_i})\,.$$

b) En déduire que

$$\mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{\{i_1,\ldots,i_k\}\subset\{1,\ldots,n\}} \mathbb{1}_{A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}}\,.$$

Exercice 1.6. Soient E et F deux ensembles, et soit f une application de E dans F.

a) Montrer que si A et B sont des sous-ensembles de E, alors

$$f[A \cup B] = f[A] \cup f[B] \quad \text{et} \quad f[A \cap B] \subset f[A] \cap f[B].$$

b) Montrer que si f est injective, alors l'inclusion ci-dessus est une égalité.

c) Montrer que si f n'est pas injective, alors il existe des ensembles $A \subset E$ et $B \subset E$ tels que $f[A \cap B] \neq f[A] \cap f[B]$.

d) Peut-on comparer $\big(f[A]\big)^c$ et $f[A^c]$? (Relativement à quel ensemble prend-on le complémentaire ?)

⋆ **Exercice 1.7.** Soient E et F deux ensembles, et f une application de E dans F, et $(A_i)_{i\in I}$ est une famille de sous-ensembles de F

a) Montrer que $f^{-1}\big(\bigcup_{i\in I} A_i\big) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(A_i)$ et que $f^{-1}\big(\bigcap_{i\in I} A_i\big) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(A_i)$.

b) Montrer que $f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$.

Exercice 1.8. Soient X et Y deux ensembles. Des ensembles $\mathscr{P}(X \times Y)$ et $\mathscr{P}(X) \times \mathscr{P}(Y)$, y en a-t-il un qui est naturellement inclus dans l'autre ?

Dénombrement

Exercice 1.9. Montrer la formule du triangle de Pascal : pour tous entiers positifs n et p, $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$.

Exercice 1.10. Soient n et p des entiers positifs.

a) Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \binom{p+k}{k} = \binom{p+n+1}{n}$.

b) En déduire la valeur de $\sum_{i=0}^{n} \prod\limits_{j=1}^{p} (i+j)$.

⋆ **Exercice 1.11.** Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}, \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}, \quad \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}, \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}.$

Exercice 1.12. 12 chevaux sont au départ d'une course.

a) Déterminer le nombre de trios possibles (sans ordre).

b) Déterminer le nombre de tiercés possibles (avec ordre). (On suppose qu'il n'y a pas d'ex-æquo.)

Exercice 1.13. On tire simultanément (= sans remise, sans ordre) 5 cartes dans un jeu de 32 cartes. Déterminer le nombre de tirages donnant : a) 5 carreaux ou 5 piques ; b) au moins 1 roi ; c) au plus 1 roi ; d) 2 rois et 3 piques.

Exercice 1.14. Dans un sac de n billes numérotées de 1 à n on tire simultanément (= sans remise, sans ordre) k billes. Déterminer

a) le nombre total de tirages ;

b) le nombre de tirages contenant la bille 1 ;

c) le nombre de tirages ne contenant pas la bille 1. (Que retrouve-t-on ?)

⋆ **Exercice 1.15.** Soit un cube (en bois par exemple) dont on colore les faces en rouge, puis qu'on découpe en 27 petits cubes de même taille.

a) Déterminer le nombre de tels petits cubes possédant : i) 0 face rouge ; ii) exactement 1 face rouge ; iii) exactement 2 faces rouges ; iv) exactement 3 faces rouges ; v) au moins 4 faces rouges.

b) On tire avec remise 3 cubes dans un sac contenant ces 27 petits cubes. Déterminer le nombre de tirages donnant : i) exactement 3 cubes possédant exactement 2 faces rouges ; ii) exactement 2 cubes possédant exactement 2 faces rouges ; iii) exactement 1 cube possédant exactement 2 faces rouges ; iv) un nombre total de faces rouges égal à 4.

☹ **Exercice 1.16.** De combien de façons peut-on mettre n boules numérotées dans p urnes ? De combien de façons peut-on mettre n boules identiques dans p urnes ?

Dénombrabilité

⋆ **Exercice 1.17.** Déterminer si les ensembles suivants sont dénombrables ou non :

a) L'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers ;

b) L'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$;

c) L'ensemble $\mathcal{A}$ des nombres algébriques ;

d) L'ensemble des réels qui ne possèdent pas une écriture décimale unique (par exemple : $1 = 0,9999...$) ;

e) L'ensemble des mots constitués de lettres d'un alphabet fini A ;

f) L'ensemble $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ des parties de $\mathbb{N}$; (Indication : on pourra raisonner par l'absurde et considérer l'ensemble $A = \{n \in \mathbb{N}\,; n \notin f(n)\}$, où $f : \mathbb{N} \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$ est une bijection)

g) L'ensemble $\mathscr{P}_{fin}(\mathbb{N})$ des parties finies de $\mathbb{N}$;

h) L'ensemble $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeur dans $\{0,1\}$.

☹ **Exercice 1.18.** On considère l'ensemble $A \subset [0,1]$ des réels compris entre 0 et 1 dont l'écriture décimale (après la virgule) ne comporte que des 1 et des 2.

a) Montrer qu'il n'existe pas de bijection $f : \mathbb{N} \to A$. (Indication : raisonner par l'absurde et considérer $x = 0, a_1^{(1)} a_2^{(2)} a_3^{(3)}...$ où $a_i^{(n)}$ est la i^{e} décimale de $f(n)$.)

b) En déduire que l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

c) Donner une bijection entre $[0,1]$ et l'ensemble $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeur dans $\{0,1\}$.