Série d'exercices n^{o} 1. Premiers pas

Une étoile désigne un exercice important.

Rappel de notations :
$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ est le nombre de choix **non ordonnés** de k éléments distincts pris parmi n.
$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ est le nombre de choix **ordonnés** de k éléments distincts pris parmi n.

Exercice 1.1. De combien de façons peut-on mettre n boules numérotées dans p urnes ? De combien de façons peut-on mettre n boules identiques dans p urnes ?

Exercice 1.2. Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. On tire avec remise 4 boules de l'urne.

1. Décrire un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ pouvant modéliser cette expérience.
2. Déterminer les probabilités d'obtenir :
   (a) quatre nombres dans un ordre strictement croissant.
   (b) quatre nombres dans un ordre croissant (au sens large).
   (c) au moins une fois le nombre 3.

Exercice 1.3. Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tels que $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 3/4$. Donner un encadrement optimal pour la valeur de $\mathbb{P}(A \cap B)$. Donner des exemples dans lesquels les bornes de l'encadrement sont atteintes.

⋆ **Exercice 1.4.** Une urne contient trois sacs. Le sac S_1 contient 2 pièces d'or, le sac S_2 contient 2 pièces ordinaires, le sac S_3 contient une pièce d'or et une pièce ordinaire. Le jeu consiste à tirer un sac au hasard (avec probabilité uniforme) puis à tirer une pièce au hasard dans ce sac.

1. Quelle est la probabilité de tirer une pièce d'or ?
2. Supposons que l'on ait tiré une pièce d'or. Quelle est alors la probabilité pour que l'autre pièce du sac soit en or ?

Exercice 1.5. Un document a été perdu. La probabilité pour qu'il se trouve dans un meuble est p, $(0 < p < 1)$. Ce meuble comporte sept tiroirs. Dans le cas où le document est dans le meuble, il se trouve avec même probabilité dans chacun des sept tiroirs. On explore six tiroirs sans trouver le document. Quelle est la probabilité de le trouver dans le septième ?

Exercice 1.6. On propose un QCM à une étudiant : 5 réponses possibles sont proposées. L'étudiant connaît (et donne) la bonne réponse avec probabilité p, et s'il ne la connaît pas, il choisit une des 5 possibilité au hasard.

1. Quelle est la probabilité que la réponse donnée par l'étudiant soit la bonne ?
2. Le correcteur, une fois la copie en main, voit que l'étudiant a donné la bonne réponse. Quelle est la probabilité qu'il connaissait la bonne réponse ?

Exercice 1.7. On tire deux cartes d'un jeu de 32. Quelle est la probabilité d'obtenir une paire ? Si l'on n'a pas obtenu une paire, on a le choix entre jeter l'une des deux cartes tirées et en retirer une parmi les 30 restantes, ou jeter les deux cartes tirées et en retirer deux parmi les 30 restantes. Quelle stratégie donne la plus grande probabilité d'avoir une paire à la fin ?

Exercice 1.8. Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On tire successivement sans remise n boules de l'urne, avec $1 \leq n \leq N$.

1. Quel est l'ensemble Ω des résultats possibles ? Calculer $\text{card}(\Omega)$.
2. Les boules numérotées de 1 à M sont rouges ($M < N$) et les boules numérotées de $M+1$ à N sont blanches. Soit A_k l'événement $\{$La k-ième boule tirée est rouge$\}$.
   (a) Calculer $\mathbb{P}(A_k)$.
   (b) Calculer $\mathbb{P}(A_k \cap A_m)$.

$\star$ **Exercice 1.9.** *(Formule d'inclusion/exclusion).* Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\mathbf{1}_{\cap_{k=1}^n A_k} = \prod_{k=1}^n \mathbf{1}_{A_k}.$$
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\mathbf{1}_{\cup_{k=1}^n A_k} = 1 - \prod_{k=1}^n (1 - \mathbf{1}_{A_k}).$$
3. On note $p_k = \sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k})$. Montrer que
$$\mathbb{P}(\cup_{k=1}^n A_k) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} p_k.$$
4. n personnes participent à un *père Noël secret* : les noms des n personnes (que l'on suppose tous différents) sont écrits sur des étiquettes, et chaque personne tire au hasard une étiquette (et la garde) – le nom écrit sur cette étiquette est celui de la personne à qui elle doit faire un cadeau. On note $p(n)$ la probabilité qu'au moins une personne tire une étiquette avec son propre nom. Expliciter $p(n)$. Calculer $\lim_{n\to\infty} p(n)$.