Université Pierre et Marie Curie Probabilités : 3M290
Année 2015-2016 groupe de TD 9

Interrogation du 8 février 2016

Durée : 30 min

Question de cours. *3 points*

1. Donner la définition d'une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$.
2. Donner la définition de l'indépendance de k événements $A_1, \ldots, A_k$.

Exercice 1. *3 points*
On effectue des lancers indépendants d'une pièce de monnaie, telle que $\mathbb{P}(\text{'Pile'}) = p$, $\mathbb{P}(\text{'Face'}) = 1 - p$, pour $p \in (0, 1)$.

1. On appelle A_n l'événement : « Il n'y a aucun 'Pile' parmi les n premiers lancers ». Calculer $\mathbb{P}(A_n)$ pour tout entier n.
2. On note $A = \bigcap_{n \geq 1} A_n$. Comment interprétez-vous l'événement A (le décrire avec des mots). Que vaut $\mathbb{P}(A)$?
3. On note X le numéro du premier lancer où 'Pile' apparaît. Donner $\mathbb{P}(X > n)$ puis calculer $\mathbb{E}[X]$. Indication : on pourra utiliser la formule $\mathbb{E}[X] = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(X > n)$.

Solution.
1. Par indépendance, on a

$$\mathbb{P}(A_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\text{ le } i^e \text{ lancer est 'Pile'}) = (1 - p)^n .$$

2. L'événement A s'interprète comme : « Il n'y a JAMAIS de 'Pile' ». Comme les A_n sont des événements décroissants, on a $\mathbb{P}(A) = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$.

3. On remarque que $\{X > n\}$ est exactement l'événement A_n. Donc $\mathbb{P}(X > n) = \mathbb{P}(A_n) = (1 - p)^n$, et

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(X > n) = \sum_{n \geq 1} (1 - p)^n = \frac{1}{p} .$$

Exercice 2. *4 points*
On considère un groupe constitué de n hommes et n femmes, que l'on sépare en deux groupes de n personnes chacun, de manière aléatoire, uniformément parmi les manières de constituer deux groupes.

1. Combien y a-t-il de manière de diviser un groupe de $2n$ personnes en deux groupes de n personnes ?

   On appelle X le nombre de femmes dans le premier groupe.
2. Donner la loi de X.
3. Calculer $\mathbb{E}[X]$. Indication : On pourra utiliser les indicatrices des événements A_i = « la $i^{\text{ème}}$ femme est dans le premier groupe ».

Solution.

1. Il y a $\binom{2n}{n}$ façons de choisir les n personnes que l'on met dans le premier groupe.

2. On calcule $\mathbb{P}(X = k)$ pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$. Il y a $\binom{n}{k}$ façons de choisir les k femmes qui vont dans le premier groupe (ensuite les autres femmes vont dans le second), et ensuite il y a $\binom{n}{n-k}$ façon de choisir les $n - k$ hommes qui vont dans ce groupe. On a donc

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}}{\binom{2n}{n}}.$$

On peut vérifier que la somme fasse bien 1 : il suffit de voir que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}$ (pour compter le nombre de façons de placer n objets dans $2n$ cases, on peut décomposer sur le nombre k d'objets placés dans les n premières cases).

3. On écrit $X = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{A_i}$. Donc $\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$, et $\mathbb{P}(A_i) = 1/2$, donc $\mathbb{E}[X] = n/2$.