UPMC 2015-2016
Licence L3 - 3M290

Examen du 20 mai 2016 - 1ère session. Durée 2h.
Sans documents ni calculatrice ni portable.

Notations : $\mathbf{P}$ est la probabilité de référence, p.s. signifie presque sûrement, v.a. signifie variable aléatoire. $\mathbf{E}(U)$ désigne l'espérance de la v.a. U.
$\mathbf{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbf{1}_A$ est la fonction indicatrice de l'ensemble A.

Questions de cours.
1) Énoncer la loi forte des grands nombres.
2) Énoncer la caractérisation de la convergence en loi à l'aide des fonctions caractéristiques.

Exercice 1. X et Y sont deux v.a. indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0,1)$.

1) Rappeler les conditions qu'une application doit satisfaire pour être un changement de variable.

2) Déterminer la loi de $(XY, \frac{X}{Y})$.

Exercice 2. Dans cet exercice f désigne une densité de probabilité sur $\mathbf{R}$. On considère une famille de v.a. $(X_a)_{a\in\mathbf{R}}$ telle que chaque X_a possède une densité notée g_a. On note Φ_a la fonction caractéristique de X_a.

1) Montrer qu'il existe une densité de probabilité G sur $\mathbf{R}$ qu'on explicitera telle que pour tout réel t,

$$\int_{\mathbf{R}} \Phi_a(t)\, f(a)\, da = \int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{itu}\, G(u)\, du.$$

2) On rappelle que la fonction caractéristique d'une v.a. de loi $\mathcal{N}(0,1)$ est la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$ définie sur $\mathbf{R}$. En déduire la fonction caractéristique d'une v.a. de loi $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$.

3) On appelle loi de Cauchy standard la mesure de probabilité sur $\mathbf{R}$ de densité $u \mapsto \frac{1}{\pi}\frac{1}{(1+u^2)}$. On admettra que la fonction caractéristique de cette loi est la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-|t|}$ définie sur $\mathbf{R}$. Montrer que pour tout réel t,

$$\mathrm{e}^{-|t|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\frac{t^2}{x^2}+x^2)}\, dx.$$

Exercice 3. $(X_i)_{i\geq 1}$ désigne une suite de v.a. indépendantes, de même loi, de carrés intégrables.

Pour tout entier $n \geq 1$ on pose $S_n = \Sigma_{i=1}^{n} X_i$ et $Z_n = \frac{S_n - n\mathbf{E}(X_1)}{\sigma\sqrt{n}}$. On considère la fonction φ définie sur $\mathbf{R}$ par $\varphi : x \mapsto \frac{|x|}{1+|x|}$.

1) En utilisant un théorème du cours que l'on précisera, montrer que la suite $\mathbf{E}(\varphi(Z_n))$ converge quand n tend vers $+\infty$ vers $\mathbf{E}(\varphi(Z))$ où Z est une v.a. dont on precisera la loi.

2) a) Soit U une v.a. à valeurs dans $[0,1]$. Montrer que $\mathbf{E}(U) = \int_0^1 \mathbf{P}(U \geq t)dt$.

b) Montrer que $\mathbf{E}(\varphi(Z_n)) = \int_0^{+\infty} \mathbf{P}(|Z_n| \geq s)\frac{1}{(1+s)^2}ds$. Indication : on pourra effectuer un changement de variable.

3) En utilisant la convergence de $P(|Z_n| \geq s)$ quand n tend vers $+\infty$ (que l'on justifiera), retrouver le résultat de la question 1).