M1 - Statistiques bayésiennes

Mini-test 2, le 6/03/2018

Durée 30mn. Les documents ne sont pas autorisés.

Exercice 1

Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables i.i.d. de loi de Poisson $\mathcal{P}(\theta)$, sachant θ. La loi a priori Π de θ est une loi Gamma(a, b), pour $a, b > 0$, de densité

$$x \mapsto \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} \mathrm{e}^{-bx} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x) \,.$$

On rappelle que $\mathbb{E}[\theta] = a/b$ et $\operatorname{Var}\theta = a/b^2$.

1. Quelle est la loi a posteriori de θ sachant $X = (X_1, \ldots, X_n)$?
2. Déterminer un estimateur de Bayes $\hat{\theta}(X)$ pour le risque quadratique.
3. Pour $\alpha \in]0, 1[$, construire, à l'aide de l'inégalité de Tchebytchev, une région de crédibilité centrée autour de $\hat{\theta}(X)$, de niveau $1 - \alpha$.
4. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}_+^*$, le risque quadratique de $\hat{\theta}(X)$ s'écrit
$$R(\theta, \hat{\theta}(X)) = \frac{1}{(b+n)^2} \left(b^2 \left(\theta - \frac{a}{b} \right)^2 + n\theta \right) .$$
5. Quel est le risque maximal de $\hat{\theta}(X)$?
6. Quel est le risque de Bayes $R_B(\Pi)$ pour la loi Π ?

Exercice 2

Soit $\Theta = \mathbb{R}$ et $\ell : \Theta \times \Theta \to \mathbb{R}_+$ une fonction de perte. Soit $\mathcal{P} = \{P_\theta, \, \theta \in \Theta\}$ un modèle statistique et Π une loi a priori sur Θ.

1. Soit T un estimateur de θ. Définir
   (a) son risque de Bayes $R_B(\Pi, T)$;
   (b) son risque maximal $R_{\max}(T)$.
2. Définir le risque de Bayes $R_B(\Pi)$ pour la loi Π, ainsi que le risque minimax R_M.
3. Montrer que si T est un estimateur de Bayes pour Π de risque constant, alors T est minimax.
4. On considère $X \sim P_\theta = \mathcal{N}(\theta, 1)$, pour $\theta \in \mathbb{R}$ (une seule observation) et on choisit $\Pi = \mathcal{N}(0, 1)$ et la fonction de perte
$$\ell(\theta, T) = (\theta - T)^2 \mathrm{e}^{a\theta} \,,$$
pour $a \in \mathbb{R}$ fixé.
   (a) Quelle est la loi a posteriori de θ sachant X ?
   (b) En utilisant le risque a posteriori, déterminer un estimateur de Bayes pour la loi Π et la fonction de perte ℓ.
   (c) Montrer que l'on obtiendrait le même estimateur de Bayes en choisissant la fonction de perte quadratique $(\theta - T)^2$ mais une autre loi a priori Π' (que l'on déterminera).