TD1. Dénombrement, opérations sur les ensembles.

1.

a) De combien de façons peut-on mettre n boules numérotées dans p urnes ?

b) De combien de façons peut-on mettre n boules identiques dans p urnes ?

Solution de l'exercice 1. Il y a p choix indépendants pour chaque boule, soit p^n manières de placer n boules numérotées dans p urnes.

Si les boules sont identiques, cela revient à considérer $n+p-1$ positions alignées, avec deux parois aux deux extrémités. Sur les $n+p-1$ positions, on place n boules et $p-1$ parois, dessinant ainsi p urnes dont la somme des boules est égale à n. Voici un exemple lorsque $n=5$, $p=3$: il y a 2 boules dans la première urne, 0 dans la deuxième, 3 dans la troisième :

$$|**||***|$$

On choisit donc la position des n boules parmi les $n+p-1$ positions possibles, les $p-1$ parois étant alors placées dans les positions restantes. De manière analogue, on pourrait aussi placer les $p-1$ parois. Il y a donc $\binom{n+p-1}{p-1} = \binom{n+p-1}{n}$ manières de le faire.

On peut aussi voir que ce problème revient à décomposer n comme somme de p entiers naturels, où l'entier naturel n_i représente le nombre de boules dans la i-ième urne.

2. On lance n dés indistinguables.

a) Combien y a-t-il de lancers distincts possibles ?

b) De combien de façons peut-on obtenir n chiffres distincts ?

c) Reprendre ces questions en supposant les dés peints de n couleurs distinctes.

Solution de l'exercice 2.

Lorsque les dés sont indistinguables, un lancer équivaut à placer n boules indistinguables dans 6 urnes, où le nombre de boules dans la i-ième urne représente le nombre de répétitions de la valeur i, $i \in \{1,\dots,6\}$. D'après l'exercice précédent, on sait qu'il y a $\binom{n+5}{n}$ possibilités.

Si on veut que les valeurs soient différentes, il faut que $n \leq 6$. On a alors autant de possibilités que de choix de ces n chiffres parmi 6, soit $\binom{6}{n}$.

Supposons maintenant les dés de couleurs différentes. Il y a 6 possibilités pour chaque dé, soit 6^n tirages possibles.

Si on veut que les valeurs soient différentes, il faut que $n \leq 6$ et on a alors 6 possibilités pour le premier dé, 5 pour le second… et $6-n+1$ pour le dernier, soit A_6^n possibilités.

3. Soit Ω un ensemble. Pour toute partie A de Ω, rappelons la fonction indicatrice de A, la fonction $\mathbb{1}_A : \Omega \to \{0,1\}$ définie par

$$\forall x \in \Omega, \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Montrer que l'application de $\mathscr{P}(\Omega)$ dans $\{0,1\}^\Omega$ qui à une partie associe sa fonction indicatrice est une bijection.

b) En déduire que $\mathscr{P}(\Omega)$ est fini si Ω est fini et calculer son cardinal.

Solution de l'exercice 3. Si f est une fonction indicatrice (autrement dit une fonction $\Omega \to \{0,1\}$), on peut lui associer la pré-image A de $\{1\}$ par f. On a alors, pour tout $x \in \Omega$,

$$x \in A \Leftrightarrow f(x) = 1.$$

Autrement dit f est la fonction indicatrice de A.

On peut aussi partir d'un ensemble A, considérer sa fonction indicatrice f, puis la pré-image par celle-ci de $\{1\}$, dont on vérifie facilement (grâce à la même équivalence) qu'il s'agit de A.

L'exercice 1 permet de conclure que l'application de $\mathscr{P}(\Omega)$ dans $\{0,1\}^\Omega$ qui à une partie associe sa fonction indicatrice est une bijection, et que sa réciproque est l'application qui à une indicatrice associe la pré-image de $\{1\}$.

En particulier si Ω est fini, on a $\operatorname{Card} \mathscr{P}(\Omega) = \operatorname{Card}(\{0,1\}^\Omega) = 2^{\operatorname{Card}\Omega}$.

4. Soit Ω un ensemble. Soient A et B des parties de Ω.

a) Exprimer $\mathbb{1}_{A^c}$ en fonction de $\mathbb{1}_A$.

b) Exprimer $\mathbb{1}_{A\cap B}$ en fonction de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$.

c) En écrivant $A \cup B$ en fonction de A^c et B^c, exprimer $\mathbb{1}_{A\cup B}$ en fonction de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$.

Solution de l'exercice 4. On note $\mathbb{1} := \mathbb{1}_\Omega$ la fonction constante égale à 1 sur Ω (souvent identifiée à 1).

On vérifie facilement que $\mathbb{1}_{A^c} = \mathbb{1} - \mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$.

Comme $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c$, les formules précédentes donnent :

$$\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1} - ((\mathbb{1} - \mathbb{1}_A)(\mathbb{1} - \mathbb{1}_B)) = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B.$$

5. Soit Ω un ensemble. Soient $A_1, \dots, A_n$ des parties de Ω.

a) Montrer que

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}|.$$

On observera que si A est finie, $|A| = \sum_{x \in \Omega} \mathbb{1}_A(x)$.
C'est la formule d'*inclusion-exclusion*, aussi connue sous le nom de *formule du crible de Poincaré.*

b) En appliquant cette formule à un ensemble et à des parties bien choisies, établir une formule pour le nombre de surjections de $\{1, \dots, p\}$ dans $\{1, \dots, n\}$ pour tous n et p entiers.

Solution de l'exercice 5. Comme dans l'exercice précédent, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{1} - \mathbb{1}_{A_1 \cup \cdots \cup A_n} &= \mathbb{1}_{A_1^c} \ldots \mathbb{1}_{A_n^c} \\
&= (\mathbb{1} - \mathbb{1}_{A_1})(\mathbb{1} - \mathbb{1}_{A_2}) \ldots (\mathbb{1} - \mathbb{1}_{A_n}) \\
&= \sum_{I \subset \{1,2,\dots,n\}} \prod_{i \in I} (-\mathbb{1}_{A_i}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sum_{I \subset \{1,2,\dots,n\}, \#I = k} \mathbb{1}_{\bigcap_{i \in I} A_i} \\
&= \mathbb{1} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \mathbb{1}_{A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\mathbb{1}_{A_1 \cup \cdots \cup A_n} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \mathbb{1}_{A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}}.$$

En sommant sur tous les éléments $x \in \Omega$ la valeur en x du membre de gauche, on obtient $|(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)|$, et en faisant la même chose pour le membre de droite on obtient l'expression voulue.

Remarquons d'abord que si $p < n$, le nombre de surjections de $\{1, \dots, p\}$ dans $\{1, \dots, n\}$ est égal à 0. Supposons donc $p \geq n$.

Soit Ω l'ensemble des applications de $\{1, \dots, p\}$ dans $\{1, \dots, n\}$. Pour tout $i = 1, \dots, n$, on considère le sous-ensemble A_i de Ω formé des applications de $\{1, \dots, p\}$ dans $\{1, \dots, n\}$ qui ne prennent pas la valeur i. Alors,

$$\begin{aligned}
(A_1 \cup \cdots \cup A_n)^c &= A_1^c \cap \cdots \cap A_n^c \\
&= \{f \in \Omega \ : \forall\ i = 1, \dots, n, \ \exists\ x_i \in \{1, \dots, p\} \text{ t.q. } f(x_i) = i\}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $(A_1 \cup \cdots \cup A_n)^c$ est l'ensemble des surjections de $\{1, \ldots, p\}$ dans $\{1, \ldots, n\}$. D'autre part, pour tout $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$,

$$\begin{aligned} A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k} &= \{f \in \Omega : \ f \text{ ne prend pas les valeurs } \{i_1, \ldots, i_k\}\} \\ &= \{f \in \Omega : \ f : \{1, \ldots, p\} \to \{1, \ldots, n\} \setminus \{i_1, \ldots, i_k\}\}. \end{aligned}$$

Donc le cardinal de $A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}$ est $(n-k)^p$. D'après la formule d'inclusion-exclusion, on obtient :

$$\begin{aligned} |(A_1 \cup \cdots \cup A_n)^c| &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}| \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} (n-k)^p \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^p = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p. \end{aligned}$$

6. Soient E un ensemble fini de cardinal p et F un ensemble fini de cardinal n.

a) Rappeler le cardinal :
   - i) du nombre d'applications de E dans F,
   - ii) du nombre d'injections de E dans F.
   - iii) Combien y-a-t-il de bijections de E dans F ?

b) Soit E un ensemble fini de cardinal n.
   - i) Déterminer le nombre d'applications bijectives $f : E \to E$ telles que pour tout $x \in E$ on ait $f(x) \neq x$. Il s'agit de déterminer le nombre de dérangements (=bijections sans point fixe) d'un ensemble de cardinal n.
   - ii) Quelle est la limite, lorsque n tend vers l'infini, de la proportion de bijections de E dans E qui ont cette propriété ?

Solution de l'exercice 6.

a) Le nombre d'applications de E dans F est n^p. Si $p > n$, le nombre d'injections de E dans F est nul, si $p \leq n$, il est égal à A_n^p. Si $p \neq n$, le nombre de bijections de E dans F est nul, sinon il est égal à $n!$.

b) On peut supposer sans perte de généralité que $E = \{1, \ldots, n\}$. On procède de manière analogue à l'exercice précédent. On prend comme ensemble de départ E' l'ensemble des bijections de E dans E. Pour tout $i = 1, \ldots, n$, on considère le sous-ensemble A_i de E' formé des bijections de E dans E qui fixent i. Alors,

$$\begin{aligned} (A_1 \cup \cdots \cup A_n)^c &= A_1^c \cap \cdots \cap A_n^c \\ &= \{f \in E' \ : \forall\, i = 1, \ldots, n, \ f(i) \neq i\}. \end{aligned}$$

Ainsi, $(A_1 \cup \cdots \cup A_n)^c$ est l'ensemble des bijections sans point fixe de E. D'autre part, pour tout $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$,

$$A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k} = \{f \in E' : f(i_1) = i_1, \ldots, f(i_k) = i_k\}.$$

Ces applications qui ont (au moins) k points fixes s'identifient naturellement à des applications bijectives de $\{1, \ldots, n\} \setminus \{i_1, \ldots, i_k\}$ dans lui même. Il y en a donc $(n-k)!$. D'après la formule d'inclusion-exclusion, on obtient :

$$\begin{aligned} |(A_1 \cup \cdots \cup A_n)^c| &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} |A_1 \cap \cdots \cap A_n| \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} (n-k)! \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)! = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Lorsqu'on divise par $n!$ pour obtenir la proportion de bijections de E qui n'ont pas de point fixe, on reconnaît le développement à l'ordre n de $\exp(x)$ pour $x = -1$, qui converge donc vers $1/e$ lorsque $n \to \infty$.

7. Soient $\Omega_1 \subseteq \Omega$ des ensembles. On suppose que Ω_1 n'est pas dénombrable. Est-il possible que Ω soit dénombrable ?

Solution de l'exercice 7. Dans le cours, on a vu que si Ω est dénombrable, alors il est en de même pour Ω_1. La contraposée nous dit que si Ω_1 n'est pas dénombrable, alors Ω ne peut être dénombrable.

8. L'ensemble des réels strictement entre 0 et 1 (autrement dit, l'intervalle ouvert $]0, 1[$) est-il dénombrable ? L'ensemble des réels entre 0 et 1 est-il dénombrable ?

Solution de l'exercice 8. La fonction $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) := \tan(\frac{\pi x}{2})$ (pour $x \in]-1, 1[$) est une bijection. Comme $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable, il en est de même pour $]-1, 1[$. D'après l'exercice précédent, $[0, 1]$ n'est pas dénombrable non plus.

9. Parmi les ensembles suivants, dire lesquels sont dénombrables : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q} \times \mathbb{R}$, l'ensemble $\{n^2, n \in \mathbb{N}\}$, l'ensemble des suites finies de longueur quelconque de 0 et de 1, l'ensemble des suites infinies de 0 et de 1, l'ensemble des suites finies d'entiers naturels, l'ensemble des polynômes à une indéterminée à coefficients rationnels.

Solution de l'exercice 9. $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables. $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable (voir poly du cours), et s'injecte (via $x \mapsto (0, x)$) dans $\mathbb{Q} \times \mathbb{R}$, qui lui non plus n'est pas dénombrable.

Comme $\{n^2,\, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}$, et $\mathbb{N}$ est dénombrable, on déduit que $\{n^2,\, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}$ est également dénombrable.

Pour tout entier n, l'ensemble des suites finies de 0 et de 1 de longueur n est dénombrable (et même fini puisqu'il y en a simplement 2^n). En faisant la réunion sur $n \in \mathbb{N}^*$ qui est dénombrable, on obtient l'ensemble des suites finies (de longueur quelconque) qui est donc encore un ensemble dénombrable. Le même argument s'applique si on remplace l'ensemble des valeurs $\{0, 1\}$ par un autre ensemble dénombrable, puisqu'un produit fini d'ensembles dénombrables et une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables sont encore dénombrables. Ainsi l'ensemble des suites finies d'entiers naturels est dénombrable, de même que l'ensemble des polynômes à une indéterminée à coefficients rationnels (en bijection avec les suites finies de rationnels qui sont simplement les coefficients des polynômes).

En revanche, l'ensemble des suites infinies de 0 et de 1 n'est pas dénombrable. En effet, cet ensemble est en bijection (voir l'exerice 3) avec avec l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$, qui, on le sait, n'est pas dénombrable.

10. Déterminer si les ensembles suivants sont dénombrables :

a) $\{n^2,\, n \in \mathbb{N}\}$,

b) $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$,

c) $\{x\sqrt{|x|}\,, x \in \mathbb{Q}\}$.

Solution de l'exercice 10. Rappelons que $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrable tandis que $\mathbb{R}$ ne l'est pas.

a) Comme $\{n^2,\, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}$, et $\mathbb{N}$ est dénombrable, on déduit que $\{n^2,\, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}$ est également dénombrable. [Plus généralement, un sous-ensemble d'un ensemble dénombrable est aussi dénombrable.]

b) Si $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ était dénombrable, alors $\mathbb{R} = (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q}$ serait dénombrable (réunion finie d'ensembles dénombrables) : absurde. Conclusion : $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ n'est pas dénombrable.

c) Les ensembles $\mathbb{Q}_+ := \mathbb{Q} \cap [0, \infty[$ et $\mathbb{Q}_- := \mathbb{Q} \cap [-\infty, 0[$ sont dénombrables (sous-ensembles d'un ensemble dénombrable). Posons $A := \{x^{3/2}\,, x \in \mathbb{Q}_+\}$. La bijection $f : \mathbb{Q}_+ \to A$ définie par $f(x) := x^{3/2}$, pour $x \in \mathbb{Q}_+$, permet de voir que A est dénombrable. C'est également le cas pour $B := \{-(-x)^{3/2}\,, x \in \mathbb{Q}_-\}$ qui a une bijection évidente avec A. Donc $\{x\sqrt{|x|}\,, x \in \mathbb{Q}\} = A \cup B$ est dénombrable (réunion finie d'ensembles dénombrables).