Examen du 27 mai 2016

Durée : 2 heures.

Exercice 1. Dans les exemples suivants, dire si ces espaces métriques sont des $\mathbb{R}$-arbres, et préciser notamment s'ils sont compacts, localement compacts ou ni l'un ni l'autre.

a) la réunion de deux droites sécantes

b) le pavé $[0,1] \times [0,1]$

c) le pavé $[0,1]\times[0,1]$ muni de la pseudo-distance d, correctement quotienté, où $d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = y_1 + y_2$ dès que $x_1 \neq x_2$ et $d((x,y_1),(x,y_2)) = |y_1 - y_2|$.

d) le pavé $\mathbb{N} \times [0,1]$ muni de la même distance d

e) l'ensemble $A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{u_n\}\times[0,u_n]$, toujours muni de la distance d, en fonction du comportement de la suite positive (u_n).

Solution de l'exercice 1.

a) la réunion de deux droites sécantes est un arbre localement compact non compact.

b) le pavé $[0,1] \times [0,1]$ muni de la distance usuelle est plein de cycles, donc ce n'est pas un arbre.

c) le pavé $[0,1] \times [0,1]$ muni de la distance d où $d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = y_1 + y_2$ est un arbre en étoile non localement compact car une infinité de segments de longueur 1 partent de l'unique point d'ordonnée 0. On aura remarqué que

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = 0 \Longleftrightarrow y_1 = y_2 = 0,$$

de sorte qu'il faut identifier tous les points de l'axe des abscisses.

d) le pavé $\mathbb{N} \times [0,1]$ muni de la distance d est bien connecté (contrairement aux apparences, après le quotientage mentionné précédemment), est un arbre localement compact mais pas compact.

e) l'ensemble $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\{u_n\} \times [0,u_n]$ est toujours un arbre mais il n'est même pas localement compact dès que (u_n) prend une infinité de valeurs distinctes dans un compact de $]0,+\infty[$. Donc soit (u_n) tend vers 0 (ou est stationnaire) et A est un arbre compact, soit $\lim_n u_n = +\infty$ et A est un arbre localement compact non compact, soit A est un arbre non localement compact.

Exercice 2. Soit $\alpha \in [0,1]$. On construit récursivement une suite de v.a. $(\tau_n)_{n\geq 1}$ où τ_n est (à valeurs) dans l'espace $\mathscr{T}_n^\ell$ des arbres binaires enracinés à n feuilles étiquetées : 1) on associe à chaque arête externe de τ_n le poids $1-\alpha$ et à chaque arête interne de τ_n (y compris son arête racinaire) le poids α ; 2) on choisit une arête de τ_n avec une probabilité proportionnelle à son poids sur laquelle on plante une nouvelle arête externe ; 3) on obtient τ_{n+1} en ré-étiquetant les feuilles de cet arbre uniformément, indépendamment de la procédure précédente. On désigne par P_n^α la loi de τ_n.

a) i) Rappeler le nombre d'arêtes internes et le nombre d'arêtes externes d'un élément de $\mathscr{T}_n^\ell$, ainsi que le cardinal de $\mathscr{T}_n^\ell$.

ii) Caractériser P_4^α.

b) Pour chacune des 3 valeurs de α proposées ci-après, caractériser P_n^α et relier cette loi au modèle de β-splitting d'Aldous pour une valeur appropriée de β :

   i) $\alpha = 0$

   ii) $\alpha = 1/2$

   iii) $\alpha = 1$

c) Comme dans le cours, on note $\tau_n = \tau_n' \oplus \tau_n''$, où τ_n' et τ_n'' sont les deux sous-arbres incidents à l'arête racinaire de τ_n, et où τ_n' est choisi uniformément au hasard parmi ces deux sous-arbres. De même, on appelle K_n le nombre de feuilles de τ_n', et l'on note

$$q_n^\alpha(i) := \mathbb{P}(K_n = i).$$

   i) Montrer que pour tout $i \in \{2, \dots, n-1\}$,

$$q_{n+1}^\alpha(i) = \frac{i-1-\alpha}{n-\alpha}\; q_n^\alpha(i-1) + \frac{n-i-\alpha}{n-\alpha}\; q_n^\alpha(i),$$

   tandis que

$$q_{n+1}^\alpha(1) = \frac{\alpha/2}{n-\alpha} + \frac{n-1-\alpha}{n-\alpha}\; q_n^\alpha(1).$$

   ii) Montrer que pour $\alpha = 0$, K_n est uniformément distribué dans $\{1, \dots, n-1\}$. Calculer q_n^1. Commenter ces deux résultats.

d) On dénomme $(P_n^{\mathrm{split},\alpha})_n$ la suite de probabilités du modèle de Markov branchant ('Markov branching model') associé à la suite $(q_n^\alpha)_n$. On cherche à montrer que $P_n^\alpha = P_n^{\mathrm{split},\alpha}$.

   i) Soit $\tau \in \mathscr{T}_{n+1}^\ell$. Pour $j \in \{1, \dots, n+1\}$, on définit par $\tau^{|j}$ l'arbre obtenu de τ en supprimant l'arête externe sous-tendant la feuille j. Soit alors $u_j(\tau)$ qui vaut 1 si la feuille j de τ est plantée sur une arête externe de $\tau^{|j}$, et 0 sinon. Enfin, on définit

$$b_j(\tau) = \frac{1-\alpha}{n-\alpha}\; u_j(\tau) + \frac{\alpha}{n-\alpha}\; (1 - u_j(\tau)).$$

   Montrer que

$$P_{n+1}^\alpha(\tau) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} b_j(\tau)\, P_n^\alpha(\tau^{|j})$$

   ii) On suppose que $P_n^\alpha = P_n^{\mathrm{split},\alpha}$ et on cherche à montrer que $P_{n+1}^\alpha = P_{n+1}^{\mathrm{split},\alpha}$, c'est-à-dire qu'en notant $\tau = \tau' \oplus \tau''$ et i le nombre de feuilles de τ'

$$P_{n+1}^\alpha(\tau) = \frac{2q_{n+1}^\alpha(i)}{\binom{n+1}{i}} P_i^\alpha(\tau')\, P_{n+1-i}^\alpha(\tau'').$$

   On note $v_j(\tau')$ qui vaut 1 si la feuille j est dans l'arbre τ' et 0 sinon. On suppose que $i \neq 1, n$. Montrer que

$$(n+1)\, P_{n+1}^\alpha(\tau) = \frac{2q_n^\alpha(i-1)}{\binom{n}{i-1}} P_{n+1-i}^\alpha(\tau'') \sum_{j=1}^{n+1} v_j(\tau') b_j(\tau)\, P_{i-1}^\alpha(\tau'^{|j})$$
$$+ \frac{2q_n^\alpha(i)}{\binom{n}{i}} P_i^\alpha(\tau') \sum_{j=1}^{n+1} v_j(\tau'') b_j(\tau)\, P_{n-i}^\alpha(\tau''^{|j})$$

   iii) Montrer que

$$v_j(\tau')\, b_j(\tau) = v_j(\tau')\, \frac{i-1-\alpha}{n-\alpha}\; b_j(\tau')$$

iv) Conclure.

e) i) Montrer que pour tout $n \geq 3$ et tout $i \in \{1, \ldots, n-1\}$,

$$q_n^\alpha(i) = \frac{\Gamma(i-\alpha)\,\Gamma(n-i-\alpha)}{\Gamma(n-\alpha)\,\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{\alpha}{2} \binom{n}{i} + (1-2\alpha) \binom{n-2}{i-1} \right)$$

ii) Pour $\alpha \in \{0, 1/2\}$, montrer qu'il existe une fonction positive f_α sur $(0,1)$ que l'on explicitera telle que

$$q_n^\alpha(i) = (c_n(\alpha))^{-1} \binom{n}{i} \int_{(0,1)} f_\alpha(x)\, x^i\, (1-x)^{n-i}\, dx \qquad (1)$$

où

$$c_n(\alpha) = \int_{(0,1)} f_\alpha(x) \left(1 - x^n - (1-x)^n\right) dx.$$

On pourra se servir de l'identité (valable pour tous $r, s > 0$)

$$\int_{(0,1)} x^{r-1}\,(1-x)^{s-1}\, dx = \frac{\Gamma(r)\,\Gamma(s)}{\Gamma(r+s)}$$

iii) Quelle(s) propriété(s) additionnelle(s) faudrait-il vérifier pour prouver directement (1) ?

Solution de l'exercice 2.

a) i) Pour tout $\tau \in \mathscr{T}_n^\ell$, τ a n arêtes externes et $n-1$ arêtes internes. On remarque donc que le poids total d'un arbre à n feuilles est toujours $(n-1)\alpha + n(1-\alpha) = n - \alpha$. Le cardinal de $\mathscr{T}_n^\ell$ est $(2n-3)!! = (2n-3)(2n-1)\cdots(3)(1)$.

ii) L'arbre τ_3 a toujours la même topologie, et la seule façon d'obtenir l'arbre à 4 feuilles symétrique en plantant une nouvelle arête sur τ_3 est de la planter sur la seule arête externe qui n'est pas dans la cerise. Donc si σ_4 est l'arbre à 4 feuilles symétrique, non étiqueté,

$$P_4^\alpha \circ \ell^{-1}(\sigma_4) = \frac{1-\alpha}{3-\alpha}.$$

Ceci caractérise la loi P_4^α. On peut détailler en disant que pour tout arbre $\tau \in \mathscr{T}_4^\ell$, si la forme de τ est σ_4, alors

$$P_4^\alpha(\tau) = \frac{1-\alpha}{3(3-\alpha)}$$

et si la forme de τ est l'arbre en peigne, alors

$$P_4^\alpha(\tau) = \frac{2}{12(3-\alpha)} = \frac{1}{6(3-\alpha)}$$

b) i) Pour $\alpha = 0$, chaque arête externe a le même poids égal à 1 et chaque arête interne ne pèse rien. À chaque étape, on choisit donc uniformément au hasard chaque feuille et on la scinde en deux nouvelles feuilles. Il s'agit exactement de la même procédure que pour construire l'arbre de Yule, donc P_n^0 est égale au modèle β d'Aldous avec $\beta = 0$.

ii) Lorsque $\alpha = 1/2$, toutes les arêtes ont le même poids (égal à $1/2$). On montre facilement par récurrence que $P_n^{\frac{1}{2}}$ est la loi uniforme sur $\mathscr{T}_n^\ell$, c'est-à-dire qu'elle est égale au modèle β d'Aldous avec $\beta = -3/2$.

iii) Lorsque $\alpha = 1$, on montre facilement par récurrence que $P_n^1 \circ \ell^{-1}$ ne charge que l'arbre en peigne, c'est-à-dire qu'elle est égale au modèle β d'Aldous avec $\beta = -2$.

c) i) On considère A' l'évènement réalisé lorsque la nouvelle arête est plantée dans τ'_n et A'' l'évènement réalisé lorsque la nouvelle arête est plantée dans τ''_n. Lorsque $i \in \{2, \dots, n-1\}$, A' et A'' sont complémentaires, ainsi

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(K_{n+1} = i) & = & \mathbb{P}(K_{n+1} = i, A') + \mathbb{P}(K_{n+1} = i, A'') \\ & = & \mathbb{P}(K_n = i-1, A', \tau'_{n+1} = \tau'_n) + \mathbb{P}(K_n = i, A'', \tau'_{n+1} = \tau'_n) \\ & + & \mathbb{P}(K_n = n-i, A', \tau'_{n+1} = \tau''_n) + \mathbb{P}(K_n = n-i+1, A'', \tau'_{n+1} = \tau''_n) \\ & = & \frac{1}{2}\mathbb{P}(K_n = i-1, A') + \frac{1}{2}\mathbb{P}(K_n = i, A'') \\ & + & \frac{1}{2}\mathbb{P}(K_n = n-i, A') + \frac{1}{2}\mathbb{P}(K_n = n-i+1, A'') \end{array}$$

Or conditionnellement à $K_n = k$, τ'_n a $k-1$ arêtes internes et k arêtes externes, donc

$$\mathbb{P}(A' | K_n = k) = \frac{(k-1)\alpha + k(1-\alpha)}{n-\alpha} = \frac{k-\alpha}{n-\alpha}$$

Par conséquent,

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(K_{n+1} = i) & = & \frac{1}{2}\mathbb{P}(K_n = i-1)\frac{i-1-\alpha}{n-\alpha} + \frac{1}{2}\mathbb{P}(K_n = i)\frac{n-i-\alpha}{n-\alpha} \\ & + & \frac{1}{2}\mathbb{P}(K_n = n-i)\frac{n-i-\alpha}{n-\alpha} + \frac{1}{2}\mathbb{P}(K_n = n-i+1)\frac{i-1-\alpha}{n-\alpha} \\ & = & \mathbb{P}(K_n = i-1)\frac{i-1-\alpha}{n-\alpha} + \mathbb{P}(K_n = i)\frac{n-i-\alpha}{n-\alpha} \end{array}$$

Lorsque $i =\in \{1, n\}$, la méthode est la même, sauf qu'il faut considérer l'évènement B réalisé si la nouvelle arête est plantée dans l'arête racinaire de τ_n...

ii) Par une récurrence immédiate on voit que $q^0_n(i) = 1/(n-1)$ et que $q^1_n(1) = q^1_n(n-1) = 1/2$. On s'attendait à ce résultat, qui est connu pour le modèle d'Aldous avec $\beta = 0$ et $\beta = -2$ respectivement.

d) i) On considère l'évènement C_j qui est réalisé si l'arête qui vient d'être ajouté à τ_n pour obtenir τ_{n+1} est l'arête externe correspondant à la feuille j. Alors $\mathbb{P}(C_j) = 1/(n+1)$ et $P^\alpha_{n+1}(\tau | C_j) = b_j(\tau)\, P^\alpha_n(\tau^{|j})$, d'où

$$P^\alpha_{n+1}(\tau) = \sum_{j=1}^{n+1} P^\alpha_{n+1}(\tau, C_j) = \frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n+1} b_j(\tau)\, P^\alpha_n(\tau^{|j})$$

ii) On suppose que $i \neq 1, n$. D'après ce qui précède,

$$\begin{array}{rcl} (n+1)\, P^\alpha_{n+1}(\tau) & = & \sum_{j=1}^{n+1} b_j(\tau)\, P^\alpha_n(\tau^{|j}) \\ & = & \sum_{j=1}^{n+1} (v_j(\tau') + v_j(\tau''))\, b_j(\tau)\, P^\alpha_n(\tau^{|j}) \end{array}$$

Par l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{array}{rcl} (n+1)\, P^\alpha_{n+1}(\tau) & = & \sum_{j=1}^{n+1} b_j(\tau)\, v_j(\tau')\, \frac{2q^\alpha_n(i-1)}{\binom{n}{i-1}}\, P^\alpha_{i-1}(\tau'^{|j})\, P^\alpha_{n+1-i}(\tau'') \\ & + & \sum_{j=1}^{n+1} b_j(\tau)\, v_j(\tau'')\, \frac{2q^\alpha_n(i)}{\binom{n}{i}}\, P^\alpha_i(\tau')\, P^\alpha_{n-i}(\tau''^{|j}), \end{array}$$

ce qui donne le résultat attendu.

iii) Rappelons que

$$b_j(\tau) = \frac{1-\alpha}{n-\alpha}\ u_j(\tau) + \frac{\alpha}{n-\alpha}\ (1-u_j(\tau)).$$

Comme $v_j(\tau')\, u_j(\tau) = v_j(\tau')\, u_j(\tau')$, on a

$$v_j(\tau')\, b_j(\tau) = v_j(\tau')\, \frac{1-\alpha}{n-\alpha}\ u_j(\tau') + v_j(\tau')\, \frac{\alpha}{n-\alpha}\ (1-u_j(\tau')).$$

Or

$$b_j(\tau') = \frac{1-\alpha}{i-\alpha}\ u_j(\tau') + \frac{\alpha}{i-\alpha}\ (1-u_j(\tau')),$$

d'où

$$v_j(\tau')\, b_j(\tau) = v_j(\tau')\, \frac{i-1-\alpha}{n-\alpha}\ b_j(\tau').$$

iv) Si l'on injecte cette dernière égalité dans le résultat obtenu à la question d-ii, on obtient

$$\begin{aligned}(n+1)\, P^\alpha_{n+1}(\tau) \quad &= \quad \frac{2q^\alpha_n(i-1)}{\binom{n}{i-1}} P^\alpha_{n+1-i}(\tau'')\, \frac{i-1-\alpha}{n-\alpha} \sum_{j=1}^{n+1} v_j(\tau') b_j(\tau')\, P^\alpha_{i-1}(\tau'^{|j}) \\ &+ \quad \frac{2q^\alpha_n(i)}{\binom{n}{i}} P^\alpha_i(\tau')\, \frac{n-i-\alpha}{n-\alpha} \sum_{j=1}^{n+1} v_j(\tau'') b_j(\tau'')\, P^\alpha_{n-i}(\tau''^{|j})\end{aligned}$$

Cela donne grâce au résultat de la question d-i

$$\begin{aligned}(n+1)\, P^\alpha_{n+1}(\tau) \quad &= \quad \frac{2q^\alpha_n(i-1)}{\binom{n}{i-1}} P^\alpha_{n+1-i}(\tau'')\, \frac{i-1-\alpha}{n-\alpha} \left(iP^\alpha_i(\tau')\right) \\ &+ \quad \frac{2q^\alpha_n(i)}{\binom{n}{i}} P^\alpha_i(\tau')\, \frac{n-i-\alpha}{n-\alpha} \left((n-i+1) P^\alpha_{n-i+1}(\tau'')\right)\end{aligned}$$

En ré-arrangeant, on obtient

$$\begin{aligned}P^\alpha_{n+1}(\tau) \quad &= \quad \frac{2}{\binom{n+1}{i}} P^\alpha_i(\tau')\, P^\alpha_{n+1-i}(\tau'') \left[\frac{i-1-\alpha}{n-\alpha}\ q^\alpha_n(i-1) + \frac{n-i-\alpha}{n-\alpha}\ q^\alpha_n(i)\right] \\ &= \quad \frac{2q^\alpha_{n+1}(i)}{\binom{n+1}{i}} P^\alpha_i(\tau')\, P^\alpha_{n+1-i}(\tau'')\end{aligned}$$

où l'on a utilisé le résultat de la question c-i dans la dernière égalité. Le cas $i \in \{1, n\}$ se traite de façon similaire.

e) i) Il s'agit ici d'un raisonnement par récurrence élémentaire.

ii) On voit facilement que l'on peut prendre $f_0(x) = 1$ et $f_{\frac{1}{2}}(x) = x^{-\frac{3}{2}}(1-x)^{-\frac{3}{2}}$.

iii) Pour prouver directement (1), on peut se servir du théorème du cours, pourvu qu'on ait montré au préalable que (P^α_n) est cohérente par échantillonnage ('sampling-consistent')... et que le coefficient d'érosion est nul (dans le théorème, il s'agit de $\mu(\{0,1\})$).