TD6. Lois, moments, variables indépendantes.

1. a) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que si X^2 est intégrable, alors X est intégrable. Ce résultat reste-t-il vrai si l'on suppose que la loi de X admet une densité ?

b) Soit $m \geq 1$ un entier. Donner un exemple d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que X^k soit intégrable pour tout k compris entre 1 et m et $\mathbb{E}[X^{m+1}] = +\infty$.

Solution de l'exercice 1.

a) En utilisant l'inégalité $|x| \leq 1 + x^2$ valable pour tout réel x et la positivité de l'espérance, on obtient que $\mathbb{E}[|X|] \leq 1 + \mathbb{E}[X^2]$, ce qui prouve que le résultat, sans hypothèse sur la variable aléatoire réelle X autre que l'existence d'un moment d'ordre 2. En particulier c'est vrai si X est à densité.

b) Notons, pour tout $s > 1$, $\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}$. Considérons une variable aléatoire X : $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}) \to \mathbb{N}^*$ telle que pour tout $n \geq 1$ on ait

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{\zeta(m+2)} \frac{1}{n^{m+2}}.$$

Alors d'une part,

$$\mathbb{E}[X^m] = \frac{1}{\zeta(m+2)} \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\zeta(2)}{\zeta(m+2)} < +\infty,$$

donc X admet un moment d'ordre m et, d'autre part,

$$\mathbb{E}[X^{m+1}] = \frac{1}{\zeta(m+2)} \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} = +\infty,$$

donc X n'admet pas de moment d'ordre $m+1$.

2. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \dfrac{1}{\pi} \dfrac{1}{1+t^2}$.

a) Montrer que f est la densité d'une mesure de probabilités sur $\mathbb{R}$. Soit X une variable aléatoire dont la loi admet la densité f.

b) La variable aléatoire X est-elle intégrable ?

c) Calculer la fonction de répartition de X.

d) Calculer la loi de $Y = \arctan(X)$.

La loi considérée dans cet exercice s'appelle la loi de Cauchy standard.

Solution de l'exercice 2.

a) On effectue le changement de variable $t = \arctan x$, et, comme $\arctan' = \frac{1}{1+\arctan^2}$, il vient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta = 1.$$

f est donc la densité d'une probabilité.

b) $\frac{x}{1+x^2} \sim x$ n'est pas intégrable au voisinage de l'infini, et donc X n'est pas intégrable.

c) Par le changement de variable du a), on obtient

$$\mathbb{P}(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\arctan a} d\theta = \frac{1}{\pi}[\arctan a + \pi/2].$$

d) Soit $b \in [-\pi/2, \pi/2]$. On a, toujours par le même calcul,

$$\mathbb{P}(Y \leq b) = \mathbb{P}(X \leq \tan b) = \int_{-\infty}^{\tan b} f(x)dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{b} d\theta = \frac{b}{\pi} + \frac{1}{2}.$$

Y suit donc la loi uniforme sur $[-\pi/2, \pi/2]$.

3. Soient $\lambda, \mu > 0$ deux réels. On considère l'ensemble $\Omega = \mathbb{N}^2$, la tribu $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\mathbb{N}^2)$ et, sur l'espace mesurable $(\Omega, \mathscr{F})$, la probabilité $\mathbb{P}$ caractérisée par

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}(\{(n,m)\}) = e^{-(\lambda+\mu)} \frac{\lambda^n}{n!} \frac{\mu^m}{m!}.$$

Enfin, sur $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, on définit les deux variables aléatoires $X(n,m) = n$ et $Y(n,m) = m$.

a) Vérifier que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

b) Déterminer la loi de X et la loi de Y.

c) Déterminer la loi de $X + Y$.

Solution de l'exercice 3.

a) On peut sommer la série double (car à termes positifs) dans l'ordre de son choix, par exemple en m puis en n. En reconnaissant le développement de l'exponentielle de μ, on obtient :

$$\sum_{m \geq 1} \mathbb{P}(\{n,m\}) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \sum_{m \geq 1} e^{-\mu} \frac{\mu^m}{m!} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!},$$

et donc on a bien :

$$\sum_{n \geq 1} \sum_{m \geq 1} \mathbb{P}(\{n,m\}) = \sum_{n \geq 1} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = 1.$$

b) D'après le calcul précédent, $\mathbb{P}(X=n)=\sum_{m\geq 1}\mathbb{P}(\{n,m\})=e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$, donc X suit la loi de Poisson de paramètre λ.
Un calcul analogue montre que Y suit la loi de Poisson de paramètre μ.

c) Déterminons la loi de $X+Y$. Soit $k\in\mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X+Y=k) &= \sum_{n=0}^{k}\mathbb{P}(\{n,k-n\})=\sum_{n=0}^{k}e^{-(\lambda+\mu)}\frac{\lambda^n}{n!}\frac{\mu^{k-n}}{(k-n)!}\\ &= e^{-(\lambda+\mu)}\frac{1}{k!}\sum_{n=0}^{k}C_k^n\lambda^k\mu^{k-n}=e^{-(\lambda+\mu)}\frac{\lambda+\mu)^k}{k!}.\end{aligned}$$

$X+Y$ suit donc la loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$.

4. Lois discrètes classiques Calculer, de deux manières différentes, la loi de :

a) la somme de deux variables aléatoires indépendantes, l'une de loi de binomiale de paramètres n et p, l'autre de paramètres m et p, où $p\in[0,1]$ et m,n sont deux entiers.

b) la somme $N_1+\ldots+N_p$ où les N_i sont indépendantes et où N_i suit une loi de Poisson de paramètre λ_i.

Solution de l'exercice 4.

Loi binômiales On peut procéder de plusieurs façons.

1. On sait que la loi binomiale de paramètres n et p est la loi de la somme de n variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p.

Soient $X_1,\ldots,X_{n+m}$ des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi de Bernoulli de paramètre p. Posons $Y=X_1+\ldots+X_n$ et $Z=X_{n+1}+\ldots+X_{n+m}$. Alors Y et Z sont indépendantes, de lois respectives $\mathcal{B}(n,p)$ et $\mathcal{B}(m,p)$. Leur somme, qui est $Y+Z=X_1+\ldots+X_{n+m}$, suit la loi $\mathcal{B}(n+m,p)$.

2. Soient Y et Z indépendantes de lois respectives $\mathcal{B}(n,p)$ et $\mathcal{B}(m,p)$. Les fonctions génératrices de Y et Z sont $G_Y(s)=(1-p+sp)^n$ et $G_Z(s)=(1-p+sp)^m$. Puisqu'elles sont indépendantes, la fonction génératrice de leur somme est

$$G_{Y+Z}(s)=\mathbb{E}[s^{Y+Z}]=\mathbb{E}[s^Y]\mathbb{E}[s^Z]=(1-p+sp)^{n+m}.$$

On reconnaît la fonction génératrice de la loi binomiale de paramètres $n+m$ et p.

Lois de Poisson La réponse est que $N_1+\ldots+N_p$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1+\ldots+\lambda_p$. A nouveau deux approches sont possibles :

— On calcule d'abord la loi de N_1+N_2 :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_1+N_2=k) &= \sum_{l=0}^{k}\mathbb{P}((N_1+N_2=k)\cap(N_1=l))=\sum_{l=0}^{k}\mathbb{P}((N_2=k-l)\cap(N_1=l))\\ &= \sum_{l=0}^{k}\mathbb{P}(N_2=k-l)\mathbb{P}(N_1=l)=\text{etc.}\end{aligned}$$

et on montre que $\mathbb{P}(N_1+N_2=k)=\frac{e^{-\lambda_1-\lambda_2}(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}$, puis on conclut par récurrence.

— On calcule la fonction génératrice de fonction génératrice de $N_1+N_2+...+N_p$ directement (qui est le produit des fonctions génératrices, par indépendance), et on reconnaît la fonction génératrice de $\mathcal{P}(\lambda_1+\dots\lambda_p)$.

5. Somme de gaussiennes Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{N}(\mu_1,\sigma_1^2)$ et $\mathcal{N}(\mu_2,\sigma_2^2)$. Soient a, b et c des réels. Déterminer la loi de $aX+bY+c$.

Solution de l'exercice 5. Soit g une fonction continue bornée $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

$$\mathbb{E}[g(X+Y)]=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}g(x+y)dydx.$$

On fait le changement de variable affine $u=x+y$ dans l'intégrale par rapport à y :

$$\mathbb{E}[g(X+Y)]=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}-\frac{(u-x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}g(u)dudx.$$

On écrit le trinôme dans l'exponentielle sous forme canonique :

$$\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}+\frac{(u-x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\left[(x-\lambda_u)^2\right]+\frac{\mu_1^2}{\sigma_1^2}+\frac{(u-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}-\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\lambda_u^2,$$

avec $\lambda_u:=\frac{\sigma_1^2\mu_1+\sigma_2^2(u-\mu_2)}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$.

En développant λ_u^2, on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{\mu_1^2}{\sigma_1^2}+\frac{(u-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}-\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\lambda_u^2\\
=\;&\frac{\mu_1^2}{\sigma_1^2}\left(1-\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)+\frac{(u-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\left(1-\frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)-2\frac{\mu_1(u-\mu_2)}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\\
=\;&\frac{\mu_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}+\frac{(u-\mu_2)^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}-2\frac{\mu_1(u-\mu_2)}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}=\frac{(u-\mu_1-\mu_2)^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}.
\end{aligned}$$

Autrement dit, le trinôme de l'exponentielle s'écrit

$$\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}+\frac{(u-x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\left[(x-\lambda_u)^2\right]+\frac{(u-\mu_1-\mu_2)^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}.$$

En remarquant que pour tout $u\in\mathbb{R}$, le changement de variable affine $x'=x-\lambda_u$ donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}(x-\lambda_u)^2}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}x^2}dx=\sqrt{\frac{2\pi\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}},$$

on obtient, en changeant l'ordre d'intégration :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[g(X+Y)] &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(u-x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}dx e^{-\frac{(u-\mu_1-\mu_2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} g(u)du \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(u-\mu_1-\mu_2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} g(u)du.
\end{aligned}$$

$X+Y$ suit donc la loi $\mathcal{N}(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$.

La question était de déterminer la loi de $aX+bY+c$. On va montrer que $aX+c$ suit la loi $\mathcal{N}(a\mu_1+c, a^2\sigma_1^2)$, ce qui, appliqué aussi à bY et combiné avec le calcul précédent, permet de conclure que $aX+bY+c$ suit la loi $\mathcal{N}(a\mu_1+b\mu_2+c, a^2\sigma_1^2+b^2\sigma_2^2)$.

Pour le voir, considérons une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et bornée. On a

$$\mathbb{E}[g(aX+c)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} g(ax+c)dx.$$

On fait le changement de variable $u = ax+c$ (la valeur absolue vient du fait que lorsque $a < 0$, on échange les bornes d'intégration) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[g(aX+c)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\frac{u-c}{a}-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} g(u)\frac{du}{|a|} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2\sigma_1^2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(u-c-a\mu_1)^2}{2a^2\sigma_1^2}} g(u)du.
\end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration.