Examen final du 21 juin 2011 (2ème session)

Durée : 2 heures. Tous documents interdits. La qualité et la rigueur de la rédaction seront prises en compte. En particulier, chaque application d'une définition ou d'un résultat du cours devra être justifiée, brièvement mais scrupuleusement.

Exercice 1.

a) Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+tx}\,dt$ $(x>0)$ et en déduire que

$$I := \int_0^\infty \left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^2 dx = \int_0^1 dt \int_0^1 ds \int_0^\infty \frac{dx}{(1+tx)(1+sx)}$$

b) Prouver l'égalité suivante pour tous $t \neq s \in]0,1[$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+tx)(1+sx)} = \frac{\ln(t/s)}{t-s}.$$

c) Montrer que

$$I = 2\int_\Delta \frac{\ln(t/s)}{t-s}\,ds\,dt,$$

où $\Delta = \{(s,t) : 0 < t < s < 1\}$.

d) Soit $D := \{(u,v) : u>0, v>0, u+v<1\}$, et Φ l'application

$$\begin{aligned}\Phi : \quad & D \longrightarrow \Delta \\ (u,v) & \longmapsto \left(\frac{v}{1-u}, \frac{uv}{1-u}\right)\end{aligned}$$

i) Montrer que Φ est bijective et donner son inverse.

ii) Montrer que Φ est de classe C^1, calculer son jacobien $J_\Phi(u,v)$ en tout point $(u,v) \in D$, et montrer que Φ est un C^1-difféomorphisme.

e) Prouver l'égalité suivante :

$$I = -2\int_0^1 \frac{\ln(u)}{1-u}\,du.$$

f) En utilisant le développement en série entière de $x \mapsto \ln(1-x)$, donner la valeur de I.

Solution de l'exercice 1.

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+xt}\,dt = [\ln(1+xt)]_0^1 = \ln(1+x)$. Après avoir vérifié que la fonction de trois variables $(x,s,t) \mapsto (1+sx)^{-1}(1+tx)^{-1}$ est bien positive sur $(0,\infty)\times(0,1)\times(0,1)$, le théorème de Fubini–Tonelli assure que

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty \left(\int_0^1 \frac{1}{1+tx}\,dt\right)^2 dx \\ &= \int_0^\infty dx \int_0^1 \frac{1}{1+tx}\,dt \int_0^1 \frac{1}{1+sx}\,ds \\ &= \int_0^1 dt \int_0^1 ds \int_0^\infty \frac{dx}{(1+tx)(1+sx)}. \end{aligned}$$

b) Soient $t \neq s \in]0,1[$. En écrivant

$$\frac{1}{(1+tx)(1+sx)} = \frac{1}{t-s}\left(\frac{t}{1+tx} - \frac{s}{1+sx}\right),$$

on obtient

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+tx)(1+sx)} = \frac{1}{t-s}\left[\ln(1+tx) - \ln(1+sx)\right]_0^\infty = \frac{\ln(t/s)}{t-s}.$$

c) Ainsi, puisque la diagonale est de mesure de Lebesgue nulle,

$$\begin{aligned} I &= \int_{\{0<s<t<1\}} \frac{\ln(t/s)}{t-s}\,ds\,dt + \int_{\{0<t<s<1\}} \frac{\ln(t/s)}{t-s}\,ds\,dt \\ &= \int_{\{0<s<t<1\}} \frac{\ln(t/s)}{t-s}\,ds\,dt + \int_{\{0<s<t<1\}} \frac{\ln(s/t)}{s-t}\,ds\,dt \\ &= 2\int_{\{0<s<t<1\}} \frac{\ln(t/s)}{t-s}\,ds\,dt, \end{aligned}$$

grâce au changement de variable $(s,t) \mapsto (t,s)$.

d) i) L'injectivité de Φ est triviale. La preuve de la surjectivité donne l'inverse de Φ : pour tout $(s,t) \in \Delta$, il existe un (unique, par l'injectivité) couple (u,v) tel que $\Phi(u,v) = (s,t)$ et ce couple est donné par $(u,v) = (t/s, s-t)$, qui est bien dans D puisque $0 < t < s$ (donc $u \in]0,1[$ et $v > 0$) et $s < 1$ (donc $v = s(1-u) < 1-u$).

ii) En écrivant $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$, par définition

$$J_\Phi(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial u} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{v}{(1-u)^2} & \frac{1}{1-u} \\ \frac{v}{(1-u)^2} & \frac{u}{1-u} \end{vmatrix} = -\frac{v}{(1-u)^2}.$$

On voit facilement que les dérivées partielles de Φ et de Φ^{-1} sont continues, donc (la bijection) Φ est un C^1-difféomorphisme. On pouvait aussi appliquer le théorème d'inversion locale, puisque Φ est de classe C^1, injective sur l'ouvert D, son jacobien ne s'annule pas sur D et $\Phi(D) = \Delta$.

e) Il s'agit évidemment ici d'appliquer la formule du changement de variable à la fonction f définie par $f(s,t) := 2\dfrac{\ln(t/s)}{t-s}$, dont on sait qu'elle est positive sur Δ. Ainsi

$$I = \int_\Delta f\,d\lambda = \int_D f\circ\Phi\,|J_\Phi|\,d\lambda = 2\int_D \frac{-\ln(u)}{v}\,\frac{v}{(1-u)^2}\,d\lambda(u,v),$$

puis par Fubini–Tonelli,

$$I = -2\int_D \frac{\ln(u)}{(1-u)^2}\,du\,dv = -2\int_0^1 \frac{\ln(u)}{(1-u)^2}\,du \int_0^{1-u} dv = -2\int_0^1 \frac{\ln(u)}{1-u}\,du.$$

f) Avec le changement de variable $x = 1-u$, on obtient

$$I = -2\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\,dx = 2\int_{]0,1[} \frac{1}{x}\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n}\,dx,$$

puis par convergence monotone,

$$I = 2\sum_{n\geq 1}\int_{]0,1[}\frac{x^{n-1}}{n}\,dx = 2\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{3}.$$

Exercice 2. Soit $(E, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré. On désignera par $\mathscr{L}^p_+(\mu)$ l'ensemble des éléments μ-p.p. *positifs* de $\mathscr{L}^p(\mu)$.
On considère une suite (f_n) d'éléments de $\mathscr{L}^2_+(\mu)$ et une fonction $f \in \mathscr{L}^2_+(\mu)$ telles que

$$\lim_{n\to\infty}\int_E (\varphi\circ f_n - \varphi\circ f)(f_n - f)\,d\mu = 0,$$

où $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une bijection continue croissante telle qu'il existe $a, b > 0$ pour lesquels $at \leq \varphi(t) \leq bt$ pour tout $t \geq 0$. On cherche à montrer que (f_n) converge vers f dans $L^2(\mu)$.

a) i) Soit $G_n := (\varphi\circ f_n - \varphi\circ f)(f_n - f)$. Montrer que de toute sous-suite de (f_n) on peut extraire une sous-suite (f_{k_n}) telle que la suite (G_{k_n}) converge μ-p.p. vers 0.

ii) En déduire que (f_{k_n}) converge μ-p.p. vers f.

b) On admettra que de plus, la suite (G_{k_n}) est dominée par une certaine fonction $G \in \mathscr{L}^1_+(\mu)$.

i) Montrer que si $u \in \mathscr{L}^2(\mu)$ et $v \in \mathscr{L}^1_+(\mu)$, alors $u + \sqrt{u^2+v} \in \mathscr{L}^2(\mu)$.

ii) Montrer que $G_{k_n} \geq af_{k_n}^2 - 2bf_{k_n}f + af^2$ et donner deux fonctions $g \in \mathscr{L}^2_+(\mu)$ et $h \in \mathscr{L}^1_+(\mu)$ telles que $f_{k_n}^2 \leq gf_{k_n} + h$.

iii) Montrer que la suite (f_{k_n}) est dominée par un élément de $\mathscr{L}^2(\mu)$.

c) Montrer que (f_{k_n}) converge vers f dans $L^2(\mu)$ et conclure.

Solution de l'exercice 2.

a) i) Comme φ est croissante, $G_n \geq 0$, et donc (toute sous-suite de) (G_n) converge dans $L^1(\mu)$ vers 0. Un résultat classique du cours (Proposition 4.1.b) donne l'existence d'une sous-suite qui converge p.p.

ii) L'ensemble des $x \in E$ tels que $\lim_n G_{k_n}(x) = 0$ est de complémentaire négligeable par la sous-question précédente. Pour un tel x, soit $f_{k_n}(x) \to f(x)$, soit $\varphi\circ f_{k_n}(x) \to \varphi\circ f(x)$. Mais même dans le deuxième cas, comme φ est une bijection continue croissante, φ^{-1} est également continue, et l'on en déduit que $\varphi^{-1}\circ\varphi\circ f_{k_n}(x) \to \varphi^{-1}\circ\varphi\circ f(x)$, autrement dit $f_{k_n}(x) \to f(x)$.

b) i) Comme $\mathscr{L}^2(\mu)$ est un espace vectoriel, il suffit de montrer que $\sqrt{u^2+v} \in \mathscr{L}^2(\mu)$. Mais ceci est une évidence car le carré de cette fonction vaut u^2+v et chacun de ces deux termes est intégrable.

ii) En utilisant le fait que $at \leq \varphi(t) \leq bt$ pour tous t, on obtient que

$$G_n = f_n(\varphi \circ f_n) - f_n(\varphi \circ f) - f(\varphi \circ f_n) + f(\varphi \circ f) \geq af_n^2 - bf_n f - bff_n + af^2.$$

D'après l'assertion admise, $G_{k_n} \leq G$ où $G \in \mathscr{L}^1(\mu)$, donc l'inégalité précédente implique que $af_{k_n}^2 - 2bff_{k_n} + af^2 \leq G$, autrement écrit $f_{k_n}^2 \leq gf_{k_n} + h$ avec $g = 2ba^{-1}f \geq 0$ et $h = (-f^2 + a^{-1}G)^+$.

iii) Comme les fonctions (f_n) sont positives, l'inégalité $f_{k_n}^2 \leq gf_{k_n} + h$ est équivalente à

$$0 \leq f_{k_n} \leq \frac{1}{2}\left(g + \sqrt{g^2 + 4h}\right),$$

et la première sous-question permet de conclure.

c) Comme la suite (f_{k_n}) converge μ-p.p. vers f et est dominée par une fonction de $\mathscr{L}^2(\mu)$, elle converge vers f dans $L^2(\mu)$ par convergence L^2-dominée. En conclusion, de toute sous-suite de (f_n) on peut extraire une sous-suite qui converge vers f dans $L^2(\mu)$, ce qui implique que la suite (f_n) converge vers f dans $L^2(\mu)$.