Examen final du 7 juin 2010 (1ère session)

Durée 2 heures. Tous documents interdits. La qualité et la rigueur de la rédaction seront prises en compte. En particulier, chaque application d'une définition ou d'un résultat du cours devra être justifiée, brièvement mais scrupuleusement.

Dans chacun des deux exercices suivants, on considèrera $\mu, \mu_0, \mu_1, \ldots$ des ***mesures de probabilité*** sur $E := \mathbb{R}^d$ muni de sa tribu borélienne $\mathcal{A} := \mathcal{B}(E)$. On dira que la suite (μ_n) ***converge étroitement*** vers la mesure μ si pour toute fonction ***continue bornée*** $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $\lim_n \int_E f\, d\mu_n = \int_E f\, d\mu$.

Exercice 1. Dans cet exercice, on cherche notamment à montrer l'équivalence des trois assertions suivantes :

(i) pour tout fermé F de E, $\mu(F) \geq \limsup_n \mu_n(F)$
(ii) pour tout ouvert O de E, $\mu(O) \leq \liminf_n \mu_n(O)$
(iii) (μ_n) converge étroitement vers μ.

a) Montrer l'équivalence entre (i) et (ii).

b) On suppose dans cette question que (iii) est vraie. Soit O un ouvert de E.

  i) Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $0 \leq f \leq \mathbb{1}_O$. Montrer que $\int f\, d\mu \leq \liminf_n \mu_n(O)$.

  ii) En appliquant un théorème de densité (d'un certain espace de fonctions dans $L^1(\mu)$) à la fonction $\mathbb{1}_O$, montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe une fonction continue f telle que $0 \leq f \leq \mathbb{1}_O$ et $\mu(O) \leq \int f\ d\mu + \epsilon$.

  iii) Conclure.

c) On suppose dans cette question que (ii) est vraie. Soit $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ continue *positive*.

  i) En appliquant le théorème de Fubini–Tonelli, montrer que pour toute mesure σ-finie ν sur $(E, \mathcal{A})$,
$$\int_E g\, d\nu = \int_{[0,+\infty[} dt\ \nu(\{g > t\}).$$

  ii) Dire pourquoi pour tout $t \geq 0$, $\{g > t\}$ est un ouvert de E, et en déduire que
$$\int_{[0,+\infty[} dt\ \mu(\{g > t\}) \leq \int_{[0,+\infty[} dt\ \liminf_n \mu_n(\{g > t\}).$$

  iii) Montrer que
$$\int_{[0,+\infty[} dt\ \mu(\{g > t\}) \leq \liminf_n \int_{[0,+\infty[} dt\ \mu_n(\{g > t\}).$$

  iv) En déduire $\int g\, d\mu \leq \liminf_n \int g\, d\mu_n$.

v) Soit maintenant f continue bornée. Alors il existe $c > 0$ tel que $|f| \leq c$. Appliquer l'inégalité précédente à $c + f$ et à $c - f$ et conclure.

d) Montrer que si les assertions (i) et (ii) sont vraies, alors $\lim_n \mu_n(A) = \mu(A)$ pour tout borélien A de E tel que $\mu(\partial A) = 0$ [on rappelle que $\partial A = \bar{A} \setminus \mathring{A}$ est appelée *frontière* de A, où $\bar{A}$ désigne l'adhérence de A et $\mathring{A}$ son intérieur].

Solution de l'exercice 1.

a) Passer au complémentaire : par exemple en supposant (i), pour tout ouvert O de E, le complémentaire F de O étant fermé,

$$\mu(O) = 1 - \mu(F) \leq 1 - \limsup_n \mu_n(F) = 1 + \liminf_n(-\mu_n(F)) = \liminf_n(1 - \mu_n(F)) = \liminf_n \mu_n(O).$$

b) On suppose dans cette question que (iii) est vraie. Soit O un ouvert de E.

i) pour tout entier n, $\int_E f \, d\mu_n \leq \mu_n(O)$, donc en passant aux limites inférieures dans chaque membre, on obtient

$$\int_E f \, d\mu = \lim_n \int_E f \, d\mu_n = \liminf_n \int_E f \, d\mu_n \leq \liminf_n \mu_n(O),$$

la première égalité étant due à (iii) (f étant par hypothèse continue et bornée).

ii) Pour tout $\epsilon > 0$, il existe une fonction f de classe C^∞ à support compact telle que $\|f - \mathbb{1}_O\|_1 \leq \epsilon$. Or on se rappelle que dans la démonstration du théorème de densité, on peut choisir f positive et dominée par $\mathbb{1}_O$. Sinon on remplace f par $g := f^+ \wedge \mathbb{1}_O$, qui vérifie ces deux restrictions, qui n'est plus C^∞ mais est toujours continue, et est telle que $\|g - \mathbb{1}_O\|_1 \leq \|f - \mathbb{1}_O\|_1 \leq \epsilon$. Ainsi

$$\mu(O) - \int f \, d\mu \leq \int |\mathbb{1}_O - f| d\mu = \|\mathbb{1}_O - f\|_1 \leq \epsilon.$$

iii) Ainsi, grâce aux deux questions précédentes, pour tout $\epsilon > 0$ il existe une fonction f continue bornée telle que $0 \leq f \leq \mathbb{1}_O$ et

$$\mu(O) - \epsilon \leq \int f \, d\mu \leq \liminf_n \mu(O_n)$$

Faisant tendre ϵ vers 0, on obtient donc l'implication $(iii) \Rightarrow (ii)$.

c) On suppose dans cette question que (ii) est vraie. Soit $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ continue *positive*.

i) Nous pouvons appliquer le théorème de Fubini–Tonelli à $\nu \otimes \lambda$ car ν et λ sont σ-finies, d'où

$$\int_{[0,+\infty[} dt \, \nu(\{g > t\}) = \int_{[0,+\infty[} dt \int_E \mathbb{1}_{t<g(x)} d\nu(x) = \int_E d\nu(x) \int_{[0,+\infty[} dt \, \mathbb{1}_{t<g(x)} = \int_E d\nu(x) g(x).$$

ii) Pour tout $t \geq 0$, $\{g > t\}$ est l'image réciproque de l'ouvert $]t, +\infty[$ par la fonction continue g, c'est donc un ouvert de E. On peut donc appliquer (ii) à ces ouverts : pour tout $t \geq 0$,

$$\mu(\{g > t\}) \leq \liminf_n \mu_n(\{g > t\}).$$

Le résultat demandé s'obtient par croissance de l'intégrale (ici, par rapport à la mesure de Lebesgue).

iii) Appliquer le lemme de Fatou :

$$\int_{[0,+\infty[} dt\ \mu(\{g > t\}) \leq \int_{[0,+\infty[} dt\ \liminf_n \mu_n(\{g > t\}) \leq \liminf_n \int_{[0,+\infty[} dt\ \mu_n(\{g > t\}).$$

iv) Appliquer la question (i) aux mesures (finies donc σ-finies) $\mu, \mu_0, \mu_1, \ldots$

v) Soit maintenant f continue bornée. Alors il existe $c > 0$ tel que $|f| \leq c$. L'inégalité précédente appliquée à $c + f$ et à $c - f$ (fonctions continues positives) donne :

$$\int (c+f)\ d\mu \leq \liminf_n \int (c+f)\ d\mu_n, \qquad \int (c-f)\ d\mu \leq \liminf_n \int (c-f)\ d\mu_n.$$

Comme les fonctions bornées sont intégrables par rapport aux mesures finies $\mu, \mu_0, \mu_1, \ldots$, on peut appliquer la linéarité de l'intégrale à la fonction bornée f et à la fonction constance à c, et le fait que l'intégrale de la fonction constante à c vaut c pour toutes ces mesures implique que

$$\int f\ d\mu \leq \liminf_n \int f\ d\mu_n \leq \limsup_n \int f\ d\mu_n \leq \int f\ d\mu,$$

ce qui implique l'égalité des quatre membres et ainsi

$$\int f\ d\mu = \lim_n \int f\ d\mu_n,$$

d'où l'implication $(ii) \Rightarrow (iii)$.

d) L'adhérence de A est un fermé et son intérieur est un ouvert, donc par (i) et (ii),

$$\mu(\mathring{A}) \leq \liminf_n \mu_n(A) \leq \limsup_n \mu_n(A) \leq \mu(\bar{A}).$$

De plus, si $\mu(\partial A) = 0$, $\mu(\bar{A}) = \mu(\mathring{A})$, et alors les quatre membres sont égaux, et égaux à $\mu(A)$ car $\mathring{A} \subseteq A \subseteq \bar{A}$ implique $\mu(\mathring{A}) \leq \mu(A) \leq \mu(\bar{A})$ ce qui donne

$$\mu(A) = \lim_n \mu_n(A).$$

Exercice 2.
Dans cet exercice, on suppose qu'il existe une mesure σ-finie ν sur $(E, \mathcal{A})$ par rapport à laquelle $\mu, \mu_0, \mu_1, \ldots$ sont toutes absolument continues.

a) Rappeler ce que signifie l'absolue continuité de μ par rapport à ν et montrer qu'il existe $h \in L^1(\nu)$ positive ν-p.p. telle que $\int_E h\ d\nu = 1$ et pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) = \int_A h\ d\nu$.
L'analogue de h lorsqu'on remplace μ par μ_n dans l'affirmation précédente sera notée $h_n \in L^1(\nu)$. **On suppose désormais que la suite (h_n) converge ν-p.p. vers h.**

b) Montrer que $(h - h_n)^+$ est dominée ν-p.p. par une fonction ν-intégrable et en déduire la limite de $\int (h - h_n)^+\ d\nu$ lorsque $n \to \infty$.

c) Déterminer la limite de $\int (h - h_n)^-\ d\nu$ lorsque $n \to \infty$.

d) Montrer que (h_n) converge dans $L^1(\nu)$ vers h, puis que pour tout $f \in L^\infty(\nu)$, (fh_n) converge dans $L^1(\nu)$ vers fh.

e) En déduire que (μ_n) converge étroitement vers μ.

Solution de l'exercice 2.

a) Absolue continuité de μ par rapport à ν : pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\nu(A) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0$. D'après le théorème de Radon–Nikodym, ν étant σ-finie (ainsi que μ qui est finie), il existe $h \in L^1(\nu)$ positive ν-p.p. telle que pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) = \int_A h \, d\nu$. Le fait que $\int_E h \, d\nu = 1$ est dû à l'hypothèse que μ est une probabilité.

b) sur $\{h - h_n \geq 0\}$, $(h - h_n)^+ = h - h_n \leq h$ ν-p.p. car $h_n \geq 0$ ν-p.p. et sur $\{h - h_n < 0\}$, $(h - h_n)^+ = 0 \leq h$ ν-p.p., donc $(h - h_n)^+ \leq h$ ν-p.p. De plus, on sait que h est ν-intégrable puisque son intégrale vaut $\mu(E) = 1$. Comme $\lim_n (h - h_n)^+ = 0$ ν-p.p. le théorème de convergence dominée permet de conclure que la limite de $\int (h - h_n)^+ \, d\nu$ lorsque $n \to \infty$ est nulle.

c) On utilise le fait que $\int (h - h_n) \, d\nu = 1 - 1 = 0$ ce qui implique que $\int (h - h_n)^- \, d\nu = \int (h - h_n)^+ \, d\nu$, qui tend vers 0 lorsque $n \to \infty$.

d) La somme des deux dernières intégrales (qui sont d'ailleurs égales) vaut $\|h - h_n\|_1$, qui est donc de limite nulle, autrement dit (h_n) converge dans $L^1(\nu)$ vers h. Soit $f \in L^\infty(\nu)$, alors par l'inégalité de Hölder,

$$\|fh_n - fh\|_1 = \|f(h_n - h)\|_1 \leq \|f\|_\infty \|h_n - h\|_1,$$

qui est encore de limite nulle, autrement dit (fh_n) converge dans $L^1(\nu)$ vers fh.

e) Pour toute fonction continue bornée f, en particulier $f \in L^\infty(\nu)$, donc d'après la question précédente, la suite réelle $(\int fh_n \, d\nu)$ converge vers $\int fh \, d\nu$, autrement dit la suite $(\int f \, d\mu_n)$ converge vers $\int f \, d\mu$. Par définition, la suite (μ_n) converge donc étroitement vers μ.