M2 "Probabilités et Finance" Sorbonne Université *Année 2022 – 2023*
"Introduction aux processus de diffusion" (L.Zambotti)

Chapitre VII. Équations différentielles stochastiques

Exercice 1. Considérons une solution X de l'EDS $E_x(\sigma,\, b)$ en dimension 1.

(1) Soit $s:\,\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $\frac{1}{2}s''\sigma^2+s'\,b=0$. Montrer que $(s(X_t),\, t\geq 0)$ est une martingale locale continue. La fonction s est appelée une **fonction d'échelle** de X.

(2) On suppose que σ est continue et que s' et σ ne s'annulent pas. Soient $a<x<b$ des réels, et soit $T_{a,b}:=\inf\{t\geq 0:\, X_t\notin\,]a,\, b[\,\}$ (avec $\inf\varnothing:=\infty$).

Montrer que $\mathbb{P}^x(T_{a,b}<\infty)=1$ (on pourra utiliser le Théorème de Dubins-Schwarz), et que (en utilisant des formules analogues pour le MB)

$$\mathbb{P}^x\{X_{T_{a,b}}=a\}=\frac{s(b)-s(x)}{s(b)-s(a)},\qquad \mathbb{P}^x\{X_{T_{a,b}}=b\}=\frac{s(x)-s(a)}{s(b)-s(a)}.$$

Exercice 2. (1) Soit $X:=(X_t,\, t\geq 0)$ solution de $E(\sigma,\, b)$ à valeurs dans un ouvert $D\subset\mathbb{R}^d$. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$ un réel. Soit $f:\, D\subset\mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $\mathscr{L}f=\lambda f$, où $(\mathscr{L}f)(x):=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^d\sum_{j=1}^d(\sigma\sigma^*)_{ij}(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x)+\sum_{i=1}^d b_i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$. Montrer que $(f(X_t)\,\mathrm{e}^{-\lambda t},\, t\geq 0)$ est une martingale locale continue.

(2) Soit $B:=(B^1,\, B^2,\, B^3)$ un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, issu de $B_0:=a\in\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$. Soit $X:=|B|^2$, où $|B|$ désigne la norme euclidienne de B. Montrer que X est solution d'une EDS $E(\sigma,\, b)$ dont on précisera les coefficients σ et b.

(3) On suppose désormais $\lambda\geq 0$. Montrer que $2tg''(t)+3g'(t)=\lambda g(t)$, $t>0$, pour $g(t)=\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{2\lambda t}}}{\sqrt{2\lambda t}}$ ou $g(t):=\frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{2\lambda t}}}{\sqrt{2\lambda t}}$.

(4) Soit $f(t)=\frac{\mathrm{sh}(\sqrt{2\lambda t})}{\sqrt{2\lambda t}}$, $t>0$. Montrer que $M_t:=f(X_t)\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$ est une martingale locale.

(5) Soient $x>|a|^2$ et $T_x:=\inf\{t\geq 0\,:\, X_t=x\}$. En utilisant la martingale locale $M_t:=f(X_t)\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$, montrer que pour tout $\lambda\geq 0$, on a $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{-\lambda T_x})=\frac{f(|a|^2)}{f(x)}$.

(6) On suppose maintenant $B_0=0\in\mathbb{R}^3$. Montrer que $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{-\lambda T_x})=\frac{1}{f(x)}=\frac{\sqrt{2\lambda x}}{\mathrm{sh}(\sqrt{2\lambda x})}$, $\lambda\geq 0$ (il faudra utiliser la propriété de Markov forte).

Exercice 3. Soient $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t),\mathbb{P},B)$ un $(\mathscr{F}_t)$-mouvement brownien (réel issu de 0) et σ et b des fonctions boréliennes sur $\mathbb{R}$ telles que pour tous $x,y\in\mathbb{R}$,

$$|\sigma(x)|\leq M,\ |b(x)|\leq M,\ |\sigma(x)-\sigma(y)|\leq K|x-y|,\ |b(x)-b(y)|\leq K|x-y|.$$

Soit, x étant fixé, X la solution de l'EDS $X_t=x+\int_0^t\sigma(X_s)\,\mathrm{d}B_s+\int_0^t b(X_s)\,\mathrm{d}s$.

On considère le processus X^n défini pour $n\geq 1$ par $X_0^n=x$ et

$$X_t^n=X_{k/n}^n+\sigma(X_{k/n}^n)(B_t-B_{k/n})+b(X_{k/n}^n)\left(t-\frac{k}{n}\right),\quad \frac{k}{n}\leq t\leq\frac{k+1}{n},\ \ k=0,1,\cdots$$

On pose $\tau_s^n:=\sum_{k=0}^\infty\frac{k}{n}\,\mathbf{1}_{[\frac{k}{n},\,\frac{k+1}{n}[}(s)$.

(1) Montrer que $X_t^n = x + \int_0^t \sigma(X^n_{\tau^n_s})\,\mathrm{d}B_s + \int_0^t b(X^n_{\tau^n_s})\,\mathrm{d}s$.

(2) Montrer qu'il existe une constante A telle que $\mathbb{E}\{(X_t^n - X^n_{\tau^n_t})^2\} \le \frac{A}{n}$, $\forall t \in [0,1]$, $\forall n \ge 1$.

(3) Montrer que pour tout $n \ge 1$ et $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{(X_t - X_t^n)^2\} &\le 4K^2 \int_0^t \mathbb{E}\{(X_s - X^n_{\tau^n_s})^2\}\,\mathrm{d}s \\ &\le 8K^2 \int_0^t \mathbb{E}\{(X_s - X_s^n)^2\}\,\mathrm{d}s + \frac{32K^2M^2}{n}.\end{aligned}$$

En déduire qu'il existe une constante C_1 telle que $\sup_{t\in[0,1]} \mathbb{E}\{(X_t - X_t^n)^2\} \le \frac{C_2}{n}$, $\forall n \ge 1$.

(4) Montrer qu'il existe une constante C_2 telle que pour toute fonction f à dérivées continues bornées, $|\mathbb{E}\{f(X_1^n) - f(X_1)\}| \le \|f'\|_\infty \frac{C_2}{\sqrt{n}}$, $\forall n \ge 1$.

Exercice 4. Soit B un $(\mathscr{F}_t)$-mouvement brownien standard.

(1) Montrer qu'il existe un processus X continu adapté tel que

$$X_t = 1 + \int_0^t \frac{1}{(1+s)(1+|X_s|)}\,\mathrm{d}B_s - \frac{1}{2}\int_0^t X_s\,\mathrm{d}s, \qquad t \ge 0.$$

(2) Montrer que X est adapté par rapport à la filtration canonique de B.

(3) Soit $X_t^* := \sup_{s\in[0,t]} |X_s|$. Montrer que $\mathbb{E}[\,(X_1^*)^2\,] < \infty$. En considérant $X_t - X_1$, montrer que $\mathbb{E}[\,(X_2^*)^2\,] < \infty$. Montrer que $\mathbb{E}[\,(X_t^*)^2\,] < \infty$ pour tout $t \ge 0$.

(4) Soit $Y_t := \mathrm{e}^{1/(1+t)}(1 + X_t^2)$, $t \ge 0$. Montrer que Y est une surmartingale (par rapport à la filtration $(\mathscr{F}_t)$). On en déduit que $\lim_{t\to\infty} Y_t$ existe p.s. (et la limite est p.s. finie).

(5) Montrer que $\lim_{t\to\infty} |X_t|$ existe p.s.

(6) En considérant la partie à variation finie de Y, montrer que $\int_0^\infty X_s^2\,\mathrm{d}s < \infty$, p.s.

(7) Montrer que $\liminf_{t\to\infty} |X_t| = 0$ p.s. En déduire que $\lim_{t\to\infty} X_t = 0$ p.s.

Exercice 5. Soit B un $(\mathscr{F}_t)$-mouvement brownien standard. Soit $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne. Fixons $x \in \mathbb{R}$ et $0 < \varepsilon \le 1$. Soit $X^{x,\varepsilon} := (X_t^{x,\varepsilon},\ t \ge 0)$ solution de l'EDS

$$X_t^{x,\varepsilon} = x + \varepsilon B_t + \int_0^t b(X_s^{x,\varepsilon})\,\mathrm{d}s, \qquad t \ge 0.$$

Soit $y^x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que

$$y^x(t) = x + \int_0^t b(y^x(s))\,\mathrm{d}s, \qquad t \ge 0.$$

Montrer que

(1) $\sup_{s\in[0,\,t]} |X_s^{x,\varepsilon} - y^x(s)| \le \varepsilon B_t^* \mathrm{e}^{Kt}$, $t \in [0,\,1]$, ou $K > 0$ est une constante

(2) pour tout $\delta > 0$, il existe $c_1 \in \mathbb{R}_+^*$ et $c_2 \in \mathbb{R}_+^*$, dont les valeurs ne dépendent pas de (x, ε), telles que $\mathbb{P}\{\sup_{t\in[0,1]} |X_t^{x,\varepsilon} - y^x(t)| > \delta\} \le c_1 \exp(-\frac{c_2}{\varepsilon^2})$.

Exercice 6. Soit $(X_t,\ t \geq 0)$ un processus continu et adapté, à valeurs dans $]0,\,1]$, tel que

$$X_t = \frac{1}{\sqrt{2}} + \int_0^t X_s(1 - X_s^2)\,\mathrm{d}B_s - \frac{1}{2}\int_0^t X_s(1 - X_s^2)(1 + 3X_s^2)\,\mathrm{d}s.$$

(1) Soit $\gamma \in]0,\,1[$ un réel, et soit $\tau := \inf\{t \geq 0 :\ X_t \geq \gamma\}$ ($\inf \varnothing := \infty$). On considère le processus $U_t := f(X_{t\wedge\tau})$, $t \geq 0$, où $f(x) := \frac{x^2}{1-x^2}$, $x \in [0, 1[$.

Montrer que $(U_t,\ t \geq 0)$ est une semimartingale, et écrire sa décomposition canonique.

(2) Montrer que $\mathbb{E}(U_t) = 1$ pour tout $t \geq 0$.

(3) Montrer à l'aide du lemme de Fatou que $f(\gamma)\mathbb{P}(\tau < +\infty) \leq 1$ et en déduire que $\mathbb{P}(\tau < \infty) \leq \frac{1-\gamma^2}{\gamma^2}$.

(4) Montrer que presque sûrement, $X_t < 1$ pour tout $t \geq 0$. En particulier, on peut p.s. définir le processus $V_t := \frac{X_t^2}{1-X_t^2}$, $t \geq 0$.

(5) Montrer que $(V_t,\ t \geq 0)$ est solution d'une équation différentielle stochastique dont on précisera les coefficients.

(6) Écrire $(X_t,\ t \geq 0)$ en fonction de $(B_t,\ t \geq 0)$.