

Chapitre VII. Équations différentielles stochastiques

Exercice 1. Considérons une solution X de l’EDS $E_x(\sigma, b)$ en dimension 1.

- (1) Soit $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $\frac{1}{2}s''\sigma^2 + s'b = 0$. Montrer que $(s(X_t), t \geq 0)$ est une martingale locale continue. La fonction s est appelée une **fonction d’échelle** de X .
- (2) On suppose que σ est continue et que s' et σ ne s’annulent pas. Soient $a < x < b$ des réels, et soit $T_{a,b} := \inf\{t \geq 0 : X_t \notin [a, b[\}$ (avec $\inf \emptyset := \infty$).

Montrer que $\mathbb{P}^x(T_{a,b} < \infty) = 1$ (on pourra utiliser le Théorème de Dubins-Schwarz), et que (en utilisant des formules analogues pour le MB)

$$\mathbb{P}^x\{X_{T_{a,b}} = a\} = \frac{s(b) - s(x)}{s(b) - s(a)}, \quad \mathbb{P}^x\{X_{T_{a,b}} = b\} = \frac{s(x) - s(a)}{s(b) - s(a)}.$$

Exercice 2. (1) Soit $X := (X_t, t \geq 0)$ solution de $E(\sigma, b)$ à valeurs dans un ouvert $D \subset \mathbb{R}^d$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ un réel. Soit $f : D \subset \mathbb{R}^d$ de classe C^2 telle que $\mathcal{L}f = \lambda f$, où $(\mathcal{L}f)(x) := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d (\sigma\sigma^*)_{ij}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^d b_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$. Montrer que $(f(X_t) e^{-\lambda t}, t \geq 0)$ est une martingale locale continue.

- (2) Soit $B := (B^1, B^2, B^3)$ un mouvement brownien à valeurs dans \mathbb{R}^3 , issu de $B_0 := a \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Soit $X := |B|^2$, où $|B|$ désigne la norme euclidienne de B . Montrer que X est solution d’une EDS $E(\sigma, b)$ dont on précisera les coefficients σ et b .
- (3) On suppose désormais $\lambda \geq 0$. Montrer que $2tg''(t) + 3g'(t) = \lambda g(t)$, $t > 0$, pour $g(t) = \frac{e^{\sqrt{2\lambda t}}}{\sqrt{2\lambda t}}$ ou $g(t) := \frac{e^{-\sqrt{2\lambda t}}}{\sqrt{2\lambda t}}$.
- (4) Soit $f(t) = \frac{\text{sh}(\sqrt{2\lambda t})}{\sqrt{2\lambda t}}$, $t > 0$. Montrer que $M_t := f(X_t) e^{-\lambda t}$ est une martingale locale.
- (5) Soient $x > |a|^2$ et $T_x := \inf\{t \geq 0 : X_t = x\}$. En utilisant la martingale locale $M_t := f(X_t) e^{-\lambda t}$, montrer que pour tout $\lambda \geq 0$, on a $\mathbb{E}(e^{-\lambda T_x}) = \frac{f(|a|^2)}{f(x)}$.
- (6) On suppose maintenant $B_0 = 0 \in \mathbb{R}^3$. Montrer que $\mathbb{E}(e^{-\lambda T_x}) = \frac{1}{f(x)} = \frac{\sqrt{2\lambda x}}{\text{sh}(\sqrt{2\lambda x})}$, $\lambda \geq 0$ (il faudra utiliser la propriété de Markov forte).

Exercice 3. Soient $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P}, B)$ un (\mathcal{F}_t) -mouvement brownien (réel issu de 0) et σ et b des fonctions boréliennes sur \mathbb{R} telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|\sigma(x)| \leq M, \quad |b(x)| \leq M, \quad |\sigma(x) - \sigma(y)| \leq K|x - y|, \quad |b(x) - b(y)| \leq K|x - y|.$$

Soit, x étant fixé, X la solution de l’EDS $X_t = x + \int_0^t \sigma(X_s) dB_s + \int_0^t b(X_s) ds$.

On considère le processus X^n défini pour $n \geq 1$ par $X_0^n = x$ et

$$X_t^n = X_{k/n}^n + \sigma(X_{k/n}^n)(B_t - B_{k/n}) + b(X_{k/n}^n) \left(t - \frac{k}{n} \right), \quad \frac{k}{n} \leq t \leq \frac{k+1}{n}, \quad k = 0, 1, \dots$$

On pose $\tau_s^n := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{n} \mathbf{1}_{[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[}(s)$.

- (1) Montrer que $X_t^n = x + \int_0^t \sigma(X_{\tau_s^n}^n) dB_s + \int_0^t b(X_{\tau_s^n}^n) ds$.
- (2) Montrer qu'il existe une constante A telle que $\mathbb{E}\{(X_t^n - X_{\tau_t^n}^n)^2\} \leq \frac{A}{n}, \forall t \in [0, 1], \forall n \geq 1$.
- (3) Montrer que pour tout $n \geq 1$ et $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{(X_t - X_t^n)^2\} &\leq 4K^2 \int_0^t \mathbb{E}\{(X_s - X_{\tau_s^n}^n)^2\} ds \\ &\leq 8K^2 \int_0^t \mathbb{E}\{(X_s - X_s^n)^2\} ds + \frac{32K^2 M^2}{n}. \end{aligned}$$

En déduire qu'il existe une constante C_1 telle que $\sup_{t \in [0, 1]} \mathbb{E}\{(X_t - X_t^n)^2\} \leq \frac{C_2}{n}, \forall n \geq 1$.

- (4) Montrer qu'il existe une constante C_2 telle que pour toute fonction f à dérivées continues bornées, $|\mathbb{E}\{f(X_1^n) - f(X_1)\}| \leq \|f'\|_\infty \frac{C_2}{\sqrt{n}}, \forall n \geq 1$.

Exercice 4. Soit B un (\mathcal{F}_t) -mouvement brownien standard.

- (1) Montrer qu'il existe un processus X continu adapté tel que

$$X_t = 1 + \int_0^t \frac{1}{(1+s)(1+|X_s|)} dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t X_s ds, \quad t \geq 0.$$

- (2) Montrer que X est adapté par rapport à la filtration canonique de B .
- (3) Soit $X_t^* := \sup_{s \in [0, t]} |X_s|$. Montrer que $\mathbb{E}[(X_1^*)^2] < \infty$. En considérant $X_t - X_1$, montrer que $\mathbb{E}[(X_2^*)^2] < \infty$. Montrer que $\mathbb{E}[(X_t^*)^2] < \infty$ pour tout $t \geq 0$.
- (4) Soit $Y_t := e^{1/(1+t)}(1 + X_t^2), t \geq 0$. Montrer que Y est une surmartingale (par rapport à la filtration (\mathcal{F}_t)). On en déduit que $\lim_{t \rightarrow \infty} Y_t$ existe p.s. (et la limite est p.s. finie).
- (5) Montrer que $\lim_{t \rightarrow \infty} |X_t|$ existe p.s.
- (6) En considérant la partie à variation finie de Y , montrer que $\int_0^\infty X_s^2 ds < \infty$, p.s.
- (7) Montrer que $\liminf_{t \rightarrow \infty} |X_t| = 0$ p.s. En déduire que $\lim_{t \rightarrow \infty} X_t = 0$ p.s.

Exercice 5. Soit B un (\mathcal{F}_t) -mouvement brownien standard. Soit $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne. Fixons $x \in \mathbb{R}$ et $0 < \varepsilon \leq 1$. Soit $X^{x, \varepsilon} := (X_t^{x, \varepsilon}, t \geq 0)$ solution de l'EDS

$$X_t^{x, \varepsilon} = x + \varepsilon B_t + \int_0^t b(X_s^{x, \varepsilon}) ds, \quad t \geq 0.$$

Soit $y^x : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que

$$y^x(t) = x + \int_0^t b(y^x(s)) ds, \quad t \geq 0.$$

Montrer que

- (1) $\sup_{s \in [0, t]} |X_s^{x, \varepsilon} - y^x(s)| \leq \varepsilon B_t^* e^{Kt}, t \in [0, 1]$, ou $K > 0$ est une constante
- (2) pour tout $\delta > 0$, il existe $c_1 \in \mathbb{R}_+^*$ et $c_2 \in \mathbb{R}_+^*$, dont les valeurs ne dépendent pas de (x, ε) , telles que $\mathbb{P}\{\sup_{t \in [0, 1]} |X_t^{x, \varepsilon} - y^x(t)| > \delta\} \leq c_1 \exp(-\frac{c_2}{\varepsilon^2})$.

Exercice 6. Soit $(X_t, t \geq 0)$ un processus continu et adapté, à valeurs dans $]0, 1]$, tel que

$$X_t = \frac{1}{\sqrt{2}} + \int_0^t X_s(1 - X_s^2) dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t X_s(1 - X_s^2)(1 + 3X_s^2) ds.$$

- (1) Soit $\gamma \in]0, 1[$ un réel, et soit $\tau := \inf\{t \geq 0 : X_t \geq \gamma\}$ ($\inf \emptyset := \infty$). On considère le processus $U_t := f(X_{t \wedge \tau})$, $t \geq 0$, où $f(x) := \frac{x^2}{1-x^2}$, $x \in [0, 1[$.

Montrer que $(U_t, t \geq 0)$ est une semimartingale, et écrire sa décomposition canonique.

- (2) Montrer que $\mathbb{E}(U_t) = 1$ pour tout $t \geq 0$.
- (3) Montrer à l'aide du lemme de Fatou que $f(\gamma)\mathbb{P}(\tau < +\infty) \leq 1$ et en déduire que $\mathbb{P}(\tau < \infty) \leq \frac{1-\gamma^2}{\gamma^2}$.
- (4) Montrer que presque sûrement, $X_t < 1$ pour tout $t \geq 0$. En particulier, on peut p.s. définir le processus $V_t := \frac{X_t^2}{1-X_t^2}$, $t \geq 0$.
- (5) Montrer que $(V_t, t \geq 0)$ est solution d'une équation différentielle stochastique dont on précisera les coefficients.
- (6) Écrire $(X_t, t \geq 0)$ en fonction de $(B_t, t \geq 0)$.