M2 "Probabilités et Finance" Sorbonne Université *Année 2022 – 2023*
"Introduction aux processus de diffusion" (L.Zambotti)

Chapitre IV. Semimartingales continues

Exercice 1. (i) Soient M et N deux martingales locales continues. Montrer que si M et N sont indépendantes, alors elles sont orthogonales (c'est-à-dire, $\langle M,\, N\rangle = 0$). On pourra considérer d'abord le cas de M et N martingales dans L^2.

(ii) Montrer que la réciproque est fausse. (On pourra, par exemple, considérer M^τ et $M - M^\tau$.)

Exercice 2. Soit M une martingale locale continue telle que $M_0 = 0$ p.s.

(i) Montrer que pour tout temps d'arrêt p.s. fini τ, on a $\mathbb{E}(M_\tau^2) \le \mathbb{E}(\langle M\rangle_\tau)$.

(ii) Soit $a > 0$ et soit $\tau_a := \inf\{t \ge 0 :\, |M_t| \ge a\}$. Montrer que $\mathbb{E}(\langle M\rangle_{\tau_a \wedge t}) \ge a^2\, \mathbb{P}(\tau_a \le t)$, $\forall t > 0$.

(iii) Montrer que $\mathbb{P}(\sup_{s\in[0,\,t]} |M_s| \ge a) \le a^{-2}\mathbb{E}(\langle M\rangle_t)$.

Exercice 3. Soit M une martingale locale continue telle que $M_0 = 0$ p.s.

(i) Soit $a > 0$ et soit $\sigma_a := \inf\{t \ge 0 :\, \langle M\rangle_t \ge a^2\}$. Montrer que

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{s\in[0,\,\sigma_a]} |M_s| > a\Big) \le \frac{1}{a^2}\mathbb{E}(a^2 \wedge \langle M\rangle_\infty).$$

(ii) Montrer que $\mathbb{P}(\sup_{t\ge 0} |M_t| > a) \le \mathbb{P}(\langle M\rangle_\infty \ge a^2) + a^{-2}\mathbb{E}(a^2 \wedge \langle M\rangle_\infty)$.

(iii) Montrer que $\mathbb{E}(\sup_{t\ge 0} |M_t|) \le 3\,\mathbb{E}(\sqrt{\langle M\rangle_\infty}\,)$.

(iv) Montrer que si $\mathbb{E}(\sqrt{\langle M\rangle_\infty}\,) < \infty$, alors M est une (vraie) martingale uniformément intégrable.

(v) Montrer que si $\mathbb{E}(\sqrt{\langle M\rangle_t}\,) < \infty$ pour tout t, alors M est une (vraie) martingale.

Exercice 4. Soit M une martingale locale continue. Montrer qu'il existe une suite de temps d'arrêt $(\tau_n) \uparrow \infty$ telle que pour tout n, $M^{\tau_n} - M_0$ soit une martingale continue bornée.

Exercice 5. Soit M un processus continu et adapté. On suppose qu'il existe une suite de temps d'arrêt $(\tau_n) \uparrow \infty$ telle que pour tout n, M^{τ_n} est une martingale locale. Montrer que M est une martingale locale.

Exercice 6. Soit M une martingale locale continue. Montrer qu'il existe $A \in \mathscr{F}$ avec $\mathbb{P}(A) = 1$ tel que pour tout $\omega \in A$ et tous $s < t$,

$\langle M\rangle_s(\omega) = \langle M\rangle_t(\omega) \;\Leftrightarrow\; M_u(\omega) = M_s(\omega),\, \forall u \in [s,\, t]$.

Exercice 7. Soit M une martingale locale continue. Montrer que M est une martingale uniformément intégrable si et seulement si $(M_\tau \mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}},\, \tau$ temps d'arrêt) est uniformément intégrable.

Exercice 8. Soit M une martingale locale continue telle que $M_0 = 0$ p.s. Soit (τ_n) une suite de temps d'arrêt finis qui réduit M.

(i) Soit τ un temps d'arrêt fini. Montrer que pour tout n, $\mathbb{E}(|X_{\tau\wedge\tau_n}|) \le \mathbb{E}(|X_{\tau_n}|)$.

(ii) Montrer que $\sup_n \mathbb{E}(|X_{\tau_n}|) = \sup\{\mathbb{E}(|X_\tau|),\ \tau$ temps d'arrêt fini$\}$.

Exercice 9. Donner un exemple de martingale locale M continue et bornée telle que $\langle M\rangle$ ne soit pas borné.

Exercice 10. Soit M une martingale locale continue, et soit A un processus à variation finie tel que $M^2 - A$ est une martingale locale. Montrer que A est indistinguable de $\langle M\rangle$.

Exercice 11. Soit M, N des martingales locales continues, et soit τ un temps d'arrêt. Montrer que $\langle M^\tau\rangle = \langle M\rangle^\tau$, $\langle N, M^\tau\rangle = \langle N^\tau, M^\tau\rangle = \langle N, M\rangle^\tau$ et $\langle M - M^\tau\rangle = \langle M\rangle - \langle M\rangle^\tau$.

Exercice 12. Soient M et N des martingales locales et continues, et soit H un processus mesurable tel que pour tout t, $\int_0^t H_s^2 \,\mathrm{d}\langle M\rangle_s < \infty$ et $\int_0^t H_s^2 \,\mathrm{d}\langle N\rangle_s < \infty$ p.s. Montrer que pour tout t, $\int_0^t H_s^2 \,\mathrm{d}\langle M+N\rangle_s < \infty$ p.s.

Exercice 13. Soit M une martingale locale continue, et soit T un temps d'arrêt fini. Soit $\mathscr{G}_t := \mathscr{F}_{t+T}$, $t \ge 0$.

(i) Montrer que si τ est un temps d'arrêt, alors $(\tau - T)^+$ est un $(\mathscr{G}_t)$-temps d'arrêt.

(ii) Montrer que $(M_{t+T},\, t \ge 0)$ est une $(\mathscr{G}_t)$-martingale locale, et calculer sa variation quadratique.