

Exercice 1 Dans cet exercice (\mathcal{F}_t) est une filtration et τ, σ sont des (\mathcal{F}_t) -temps d’arrêt. On rappelle les définitions

$$\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{F}_\infty : \forall t \geq 0, A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}$$

$$\mathcal{F}_{\tau+} := \{A \in \mathcal{F}_\infty : \forall t \geq 0, A \cap \{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t\}$$

- (i) Si $\sigma \leq \tau$ alors $\mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_\tau$.
- (ii) $\sigma \wedge \tau$ et $\sigma \vee \tau$ sont des temps d’arrêt, et on a $\mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau} = \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{F}_\tau$. En plus, $\{\sigma \leq \tau\} \in \mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau}$ et $\{\sigma = \tau\} \in \mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau}$ (et donc $\{\sigma < \tau\} \in \mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau}$).
- (iii) Si σ et τ sont des temps d’arrêt, alors $\sigma + \tau$ est un temps d’arrêt.
- (iv) Si (τ_n) est une suite croissante de temps d’arrêt, alors $\tau := \lim_n \uparrow \tau_n$ est aussi un temps d’arrêt, et

$$\mathcal{F}_{\tau-} = \bigvee_n \mathcal{F}_{\tau_n-}.$$

- (iv) Si (τ_n) est une suite décroissante de temps d’arrêt, alors $\tau := \lim_n \downarrow \tau_n$ est un (\mathcal{F}_{t+}) -temps d’arrêt, et

$$\mathcal{F}_{\tau+} = \bigcap_n \mathcal{F}_{\tau_n+}.$$

- (v) Si $(\tau_n)_{n \geq 1}$ est une suite de temps d’arrêt, alors $\sup_{n \geq 1} \tau_n$ est un temps d’arrêt.
- (vi) Si $\mathcal{G}_t := \mathcal{F}_{t+}$ alors $\mathcal{G}_\tau = \mathcal{F}_{\tau+}$.

Exercice 2 Soit $M = (M_t, t \geq 0)$ une sous-martingale. Soit (\mathcal{G}_t) une sous-filtration¹ de (\mathcal{F}_t) . Montrer que² $N_t := \mathbb{E}(M_t | \mathcal{G}_t), t \geq 0$, est une (\mathcal{G}_t) -sous-martingale.

Exercice 3 Soit $M = (M_t, t \geq 0)$ une martingale telle que $\sup_{t \geq 0} \mathbb{E}(|M_t|) < \infty$.

- (i) Soit $t \geq 0$ fixé et $\xi_n := \mathbb{E}(M_n^+ | \mathcal{F}_t), n \geq t \geq 0$. Montrer que si $n \geq m \geq t$ alors p.s. $\xi_n \geq \xi_m$. Montrer que $\mathbb{E}(M_n^+ | \mathcal{F}_t)$ converge (lorsque $n \rightarrow \infty$) p.s. vers une variable aléatoire réelle, notée X_t .

- (ii) Montrer que $(X_t, t \geq 0)$ est une martingale.
- (iii) Montrer que M s’écrit comme différence de deux martingales positives.

1. C’est-à-dire, une filtration telle que $\mathcal{G}_t \subset \mathcal{F}_t, \forall t \geq 0$.

2. En particulier, toute (sous-)martingale est une (sous-)martingale par rapport à sa filtration canonique.

Exercice 4 Soit $M := (M_t, t \in [0, 1])$ une sous-martingale telle que $\mathbb{E}(M_0) = \mathbb{E}(M_1)$. Montrer que M est une martingale.

Exercice 5 Soit M une martingale continue. Soit $t \geq 0$. Montrer que $M_{t+\varepsilon} \rightarrow M_t$ (lorsque $\varepsilon \downarrow 0$) dans L^1 .

Exercice 6 Soit ξ une variable aléatoire réelle. Soit $M_t := \mathbb{P}(\xi \leq t | \mathcal{F}_t)$. Montrer que $(M_t, t \geq 0)$ est une sous-martingale.

Exercice 7 Soit τ un temps d'arrêt et $(M_t, t \geq 0)$ une martingale continue à droite et uniformément intégrable. Montrer que $(M_{\tau \wedge t}, t \geq 0)$ est une martingale uniformément intégrable.

Exercice 8 (i) Soit (M_t) une martingale continue et positive, telle que $M_t \rightarrow 0$, p.s. ($t \rightarrow \infty$). Montrer que pour tout $x > 0$, $\mathbb{P}(\sup_{t \geq 0} M_t \geq x | \mathcal{F}_0) = 1 \wedge \frac{M_0}{x}$, p.s.

(ii) Soit B un mouvement brownien. Calculer la loi de $\sup_{t \geq 0} (B_t - t)$.

(ii) Soit B un mouvement brownien issu de $x > 0$. Calculer la loi de $\sup_{t \leq \tau_0} B_t$, où $\tau_0 := \inf\{t > 0 : B_t = 0\}$.

Dans les exercices suivants, B est un (\mathcal{F}_t) -mouvement brownien.

Exercice 9 Soient $\sigma \leq \tau$ deux temps d'arrêt bornés. Montrer que $\mathbb{E}[(B_\tau - B_\sigma)^2] = \mathbb{E}(B_\tau^2) - \mathbb{E}(B_\sigma^2) = \mathbb{E}(\tau - \sigma)$.

Exercice 10 Soient $a > 0$ et $b > 0$.

(i) Soit $\tau_{a,b} := \inf\{t \geq 0 : B_t = -a \text{ ou } B_t = b\} = \tau_{-a} \wedge \tau_b$. En étudiant $M_t := \text{sh}(\theta(B_t + a)) \exp(-\frac{\theta^2}{2}t)$, montrer que

$$\mathbb{E} [e^{-\lambda \tau_{a,b}}] = \frac{\text{ch}(\frac{a-b}{2} \sqrt{2\lambda})}{\text{ch}(\frac{a+b}{2} \sqrt{2\lambda})}, \quad \lambda \geq 0.$$

(ii) Montrer que $\mathbb{P}(\tau_b < \tau_{-a}) = \frac{a}{a+b}$ et que $\mathbb{P}(\tau_b > \tau_{-a}) = \frac{b}{a+b}$.

(iii) Quelle est la loi de $\sup_{0 \leq t \leq \tau_{-1}} B_t$?

Exercice 11 Soient $\gamma \neq 0$, $a > 0$ et $b > 0$ trois réels. Posons $\tau_x := \inf\{t > 0 : B_t + \gamma t = x\}$, $x = -a$ ou b . Calculer $\mathbb{P}(\tau_{-a} > \tau_b)$.

Indication : on pourra considérer la martingale $\exp\{-2\gamma(B_t + \gamma t)\}$.