M2 "Probabilités et Finance" Sorbonne Université *Année 2022 – 2023*
"Introduction aux processus de diffusion" (L.Zambotti)

Chapitre II. Mouvement brownien et propriété de Markov

Dans tous les exercices, $B = (B_t,\ t \geq 0)$ est un mouvement brownien.

Exercice 1 Soient (X, Y) un couple aléatoire défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $E \times F$. Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ une sous-tribu telle que X soit $\mathcal{A}$-mesurable et Y soit indépendant de $\mathcal{A}$. Prouver que si $\varphi : E \times F \to \mathbb{R}$ est mesurable bornée, alors

$$\mathbb{E}[\varphi(X, Y) \,|\, \mathcal{A}] = \Phi(X),$$

où $\Phi : E \to \mathbb{R}$ est donnée par $\Phi(x) := \mathbb{E}[\varphi(x, Y)]$, $x \in E$.

Exercice 2 On définit $d_1 := \inf\{t \geq 1 :\ B_t = 0\}$ et $g_1 := \sup\{t \leq 1 :\ B_t = 0\}$.

(i) Les variables aléatoires d_1 et g_1 sont-elles des temps d'arrêt ?

(ii) Calculer la loi de d_1 et celle de g_1 (indication : utiliser la propriété de Markov au temps 1 et une formule obtenue dans le cours pour la loi de τ_x, $x \in \mathbb{R}$).

Exercice 3 On pose $\tau_1 := \inf\{t > 0 :\ B_t = 1\}$ et $\tau := \inf\{t \geq \tau_1 :\ B_t = 0\}$. Calculer la loi de τ à l'aide de la propriété de Markov forte.

Exercice 4 (i) Étudier la convergence en loi et probabilité de $\frac{\log(1+B_t^2)}{\log t}$ (quand $t \to \infty$).

(ii) Étudier la convergence p.s. de $\frac{\log(1+B_t^2)}{\log t}$.

Exercice 5 (i) Soient $[a, b]$ et $[c, d]$ deux intervalles disjoints de $\mathbb{R}_+$. Montrer que presque sûrement, $\sup_{t\in[a,b]} B_s \neq \sup_{t\in[c,d]} B_s$.

(ii) En déduire que p.s., chaque maximum local de B est un maximum local au sens strict.

Exercice 6 En utilisant la propriété de scaling, montrer que $(\int_0^t \mathrm{e}^{B_s}\, \mathrm{d}s)^{1/t^{1/2}} \to \mathrm{e}^{|N|}$ en loi lorsque $t \to \infty$, où N suit la loi gaussienne $\mathscr{N}(0,\, 1)$.

Exercice 7 (i) Soit $a > 0$ et soit $\tau_a := \inf\{t \geq 0 :\ B_t = a\}$. Nous avons vu dans le chapitre 2 du poly la densité explicite de τ_a, qui permet de montrer que $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-\lambda \tau_a}] = \mathrm{e}^{-a\sqrt{2\lambda}}$, $\forall \lambda \geq 0$ (on donnera une preuve alternative dans le chapitre 3). En déduire que $\mathbb{P}(\tau_a \leq t) \leq \exp(-\frac{a^2}{2t})$, pour tout $t > 0$.

(ii) Montrer que si ξ est une variable aléatoire suivant la loi gaussienne $\mathscr{N}(0,\, 1)$, alors $\mathbb{P}(\xi \geq x) \leq \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2/2}$, $\forall x > 0$ (à comparer avec l'exercice 1 de la feuille n. 0).

Exercice 8 Soit $S_t := \sup_{s\in[0,t]} B_s$, $t \geq 0$. Montrer que $S_2 - S_1$ a la même loi que $\max\{|N| - |\widetilde{N}|, 0\}$, où N et $\widetilde{N}$ désignent deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi gaussienne $\mathscr{N}(0, 1)$.

Exercice 9 Montrer que p.s. $\int_0^\infty \sin^2(B_t)\,\mathrm{d}t = \infty$ en utilisant une suite $(\tau_i)_{i\geq 0}$ de temps aléatoires définis par récurrence : $\tau_0 := 0$, $\tau_{2i+1} := \inf\{t > \tau_{2i} : |B_t| = 1\}$ et $\tau_{2i+2} := \inf\{t > \tau_{2i+1} : B_t = 0\}$ pour $i \geq 0$.

Exercice 10 (loi du logarithme itéré) On pose $S_t := \sup_{s\in[0,t]} B_s$, $h(t) := \sqrt{2t \log\log t}$.

(i) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que la série numérique $\sum_n \mathbb{P}\{S_{t_{n+1}} \geq (1+\varepsilon)h(t_n)\}$ est convergente, où $t_n = (1+\varepsilon)^n$. En déduire que $\limsup_{t\to\infty} \frac{S_t}{h(t)} \leq 1$, p.s.

(ii) Montrer que

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\sup_{s\in[0,t]} |B_s|}{h(t)} \leq 1, \qquad \text{p.s.}$$

(iii) Soit $\theta > 1$, et soit $s_n = \theta^n$. Montrer que pour tout $\alpha \in]0, \sqrt{1-\theta^{-1}}\,[$, la série numérique $\sum_n \mathbb{P}\{B_{s_n} - B_{s_{n-1}} > \alpha\, h(s_n)\}$ est divergente. En déduire que $\limsup_{t\to\infty} \frac{B_t}{h(t)} \geq \alpha - \frac{2}{\sqrt{\theta}}$, p.s.

(iv) Montrer que

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{B_t}{h(t)} = 1, \qquad \text{p.s.}$$

(v) Soient $X_1(t) := |B_t|$, $X_2(t) := S_t$, et $X_3(t) := \sup_{s\in[0,t]} |B_s|$. Que peut-on dire de $\limsup_{t\to\infty} \frac{X_i(t)}{h(t)}$ pour $i = 1, 2$, ou 3 ?

(vi) Que peut-on dire de $\liminf_{t\to\infty} \frac{B_t}{h(t)}$? Et de $\limsup_{t\to 0} \frac{B_t}{\sqrt{2t\log\log(1/t)}}$?