M2 "Probabilités et Finance" Sorbonne Université *Année 2022 – 2023*
"Introduction aux processus de diffusion" (L.Zambotti)

Chapitre I. Construction du mouvement brownien

Exercice 1 Soit $(B^m_t,\, t \in [0,\,1])$, pour $m \geq 0$, une suite de mouvements browniens indépendants définis sur $[0,\,1]$. On pose

$$B_t := B^{\lfloor t\rfloor}_{t-\lfloor t\rfloor} + \sum_{0\leq m<\lfloor t\rfloor} B^m_1, \qquad t \geq 0.$$

Montrer que $(B_t,\, t \geq 0)$ est un mouvement brownien.

Dans les exercices suivants, $(B_t,\, t \geq 0)$ est un mouvement brownien.

Exercice 2 Soit $T := \inf\{t \geq 0 : \ B_t = 1\}$ (avec la convention $\inf \varnothing := \infty$). Montrer que [1] $\mathbb{P}(T < \infty) \geq \frac{1}{2}$. (On pourra comparer $\mathbb{P}(B_t \geq 1)$ et $\mathbb{P}(T \leq t)$.)

Exercice 3 Soit $\xi := \int_0^1 B_t \,\mathrm{d}t$. Quelle est la loi de ξ ?

Exercice 4 Soit $\eta := \int_0^2 B_t \,\mathrm{d}t$. Calculer l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(B_1 \,|\, \eta)$.

Exercice 5 Montrer que $B_7 - B_2$ est indépendante de $\sigma(B_s,\, s \in [0,\,1])$.

Exercice 6 Soit $\mathscr{F}_1 := \sigma(B_s,\, s \in [0,\,1])$. Calculer les espérances conditionnelles $\mathbb{E}(B_5 \,|\, \mathscr{F}_1)$ et $\mathbb{E}(B_5^2 \,|\, \mathscr{F}_1)$.

Exercice 7 (i) Montrer que pour tout $t > 0$, $\int_0^t B_s^2 \,\mathrm{d}s$ a la même loi que $t^2 \int_0^1 B_s^2 \,\mathrm{d}s$.

(ii) Montrer que les processus $(\int_0^t B_s^2 \,\mathrm{d}s,\, t \geq 0)$ et $(t^2 \int_0^1 B_s^2 \,\mathrm{d}s,\, t \geq 0)$ n'ont pas la même loi.

Exercice 8 Soit T une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1, indépendante de B. Quelle est la loi de B_T ?

Exercice 9 Montrer que $\int_0^1 \frac{B_s}{s} \,\mathrm{d}s$ est bien définie p.s.

Exercice 10 Soit $\beta_t := B_t - \int_0^t \frac{B_s}{s} \,\mathrm{d}s$. Montrer que $(\beta_t,\, t \geq 0)$ est un mouvement brownien.

1. Plus tard, on verra que $T < \infty$ p.s.

Exercice 11 Montrer que $\int_0^\infty |B_s|\,\mathrm{d}s = \infty$ p.s. (indication : étudier d'abord $X_t := \int_0^t |B_s|\,\mathrm{d}s$ et $\mathbb{P}(X_t \geq x)$ en utilisant la propriété de scaling).

Exercice 12 Soit $B := (B_t,\, t \in [0,\, 1])$ un mouvement brownien standard indexé par $[0,\, 1]$. Pour tout $t \in [0,\, 1]$, on pose

$$\begin{aligned} \mathscr{F}_t &:= \sigma(B_s,\ s \in [0,\, t]), \\ \mathscr{G}_t &:= \mathscr{F}_t \vee \sigma(B_1) = \sigma(\{C;\ C \in \mathscr{F}_t \text{ ou } C \in \sigma(B_1)\}). \end{aligned}$$

(i) Soient $0 \leq s < t \leq 1$. Montrer que la v.a.

$$\frac{1-t}{1-s}\,(B_t - B_s) - \frac{t-s}{1-s}\,(B_1 - B_t)$$

est indépendante de $\mathscr{G}_s$. En déduire que

$$\mathbb{E}[(B_t - B_s)\,|\,\mathscr{G}_s] = \frac{t-s}{1-s}\,(B_1 - B_s).$$

(ii) Considérons le processus $\beta := (\beta_t,\, t \in [0,\, 1])$ défini par

$$\beta_t := B_t - \int_0^t \frac{B_1 - B_s}{1-s}\,\mathrm{d}s, \qquad t \in [0,\, 1].$$

Montrer que pour $0 \leq s < t \leq 1$, $\mathbb{E}(\beta_t\,|\,\mathscr{G}_s) = \beta_s$ p.s.

(iii) Montrer que

$$\beta_t = B_t - tB_1 + \int_0^t \frac{B_s - sB_1}{1-s}\,\mathrm{d}s, \qquad t \in [0,\, 1].$$

(iv) Montrer que $(B_t - tB_1)_{t\in[0,1]}$ et $(\beta_t)_{t\in[0,1]}$ sont indépendants de B_1.

(v) Montrer que $(\beta_t)_{t\in[0,1]}$ est un mouvement brownien. En déduire que le pont brownien défini par $b_t := B_t - tB_1$, $t \in [0, 1]$, satisfait

$$b_t = -\int_0^t \frac{b_s}{1-s}\,\mathrm{d}s + \beta_t, \qquad t \in [0,\, 1].$$