M2 "Probabilités et Finance" Sorbonne Université *Année 2022 – 2023*
"Introduction aux processus de diffusion" (L.Zambotti)

TD0. Prérecquis et rappels

Exercice 1 Soit ξ une variable aléatoire suivant la loi gaussienne $\mathscr{N}(0,\, 1)$. Soit $x > 0$ un réel strictement positif.

(i) Montrer que $\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) \mathrm{e}^{-x^2/2} \leq \mathbb{P}(\xi > x) \leq \frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\, \frac{1}{x}\, \mathrm{e}^{-x^2/2}$.

(ii) Montrer que [1] $\mathbb{P}(\xi > x) \leq \mathrm{e}^{-x^2/2}$.

Exercice 2 Soit ξ une variable aléatoire suivant la loi gaussienne $\mathscr{N}(0,\, 1)$.

(i) Calculer $\mathbb{E}(\xi^4)$ et $\mathbb{E}(|\xi|)$.

(ii) Calculer $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{a\xi})$, $\mathbb{E}(\xi \mathrm{e}^{a\xi})$ et $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{a\xi^2})$, où $a \in \mathbb{R}$ est un réel.

(iii) Soit $b \geq 0$ un réel positif. Soit η une variable aléatoire suivant la loi gaussienne $\mathscr{N}(0,\, 1)$, indépendante de ξ. Montrer que $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{b\xi^2}) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{\lambda\xi\eta})$, où $\lambda := (2b)^{1/2}$.

Exercice 3 Soient ξ, ξ_1, ξ_2, $\cdots$ des variables aléatoires réelles. On suppose que pour tout n, ξ_n suit la loi gaussienne $\mathscr{N}(\mu_n,\, \sigma_n^2)$, où $\mu_n \in \mathbb{R}$ et $\sigma_n \geq 0$, et que ξ_n converge en loi vers ξ. Montrer que ξ suit une loi gaussienne.

Exercice 4 Soient ξ, ξ_1, ξ_2, $\cdots$ des variables aléatoires réelles. On suppose que pour tout n, ξ_n suit la loi gaussienne $\mathscr{N}(\mu_n,\, \sigma_n^2)$, où $\mu_n \in \mathbb{R}$ et $\sigma_n \geq 0$, et que ξ_n converge en probabilité vers ξ. Montrer que ξ_n converge dans L^p, pour tout $p \in [1,\, \infty[$.

Exercice 5 Soit $(\xi,\, \eta,\, \theta)$ un vecteur gaussien à valeurs dans $\mathbb{R}^3$. On suppose $\mathbb{E}(\xi) = \mathbb{E}(\eta) = \mathbb{E}(\xi\eta) = 0$, $\sigma_\xi^2 := \mathbb{E}(\xi^2) > 0$ et $\sigma_\eta^2 := \mathbb{E}(\eta^2) > 0$.

1. Montrer que $\mathbb{E}(\theta \,|\, \xi) = \mathbb{E}(\theta) + \frac{\mathbb{E}(\theta\xi)}{\mathbb{E}(\xi^2)}\, \xi$.
2. Montrer que $\mathbb{E}(\theta \,|\, \xi,\, \eta) = \mathbb{E}(\theta \,|\, \xi) + \mathbb{E}(\theta \,|\, \eta) - \mathbb{E}(\theta)$.
3. Montrer que $\mathbb{E}(\xi \,|\, \xi\eta) = 0$.
4. Montrer que $\mathbb{E}(\theta \,|\, \xi\eta) = \mathbb{E}(\theta)$.

Exercice 6 Soient ξ et η deux variables aléatoires intégrables, et soit $\mathscr{G}$ une sous-tribu de $\mathscr{F}$.

1. Plus tard, on verra que $\mathbb{P}(\xi > x) \leq \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2/2}$.

(i) Montrer que $\mathbb{E}(\xi \,|\, \mathscr{G}) \le \mathbb{E}(\eta \,|\, \mathscr{G})$, p.s., si et seulement si $\mathbb{E}(\xi \, \mathbf{1}_A) \le \mathbb{E}(\eta \, \mathbf{1}_A)$ pour tout $A \in \mathscr{G}$.

(ii) Montrer que $\mathbb{E}(\xi \,|\, \mathscr{G}) = \mathbb{E}(\eta \,|\, \mathscr{G})$, p.s., si et seulement si $\mathbb{E}(\xi \, \mathbf{1}_A) = \mathbb{E}(\eta \, \mathbf{1}_A)$ pour tout $A \in \mathscr{G}$.

Exercice 7 Soit $(X_\alpha, \, \alpha \in A)$ une famile de variables aléatoires réelles, indexée par un ensemble non vide A quelconque. On rappelle la définition suivante : $(X_\alpha, \, \alpha \in A)$ est dite uniformément intégrable si

$$\lim_{K \to +\infty} \sup_{\alpha \in A} \mathbb{E}(|X_\alpha| \, \mathbb{1}_{(|X_\alpha| > K)}) = 0.$$

Montrer que $(X_\alpha, \, \alpha \in A)$ est uniformément intégrable si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

(i) $\sup_{\alpha \in A} \mathbb{E}(|X_\alpha|) < \infty$;

(ii) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $\forall B \in \mathscr{F}$, $\mathbb{P}(B) < \delta \Rightarrow \sup_{\alpha \in A} \mathbb{E}(|X_t| \, \mathbf{1}_B) < \varepsilon$.

Exercice 8 Soit ξ une variable aléatoire réelle telle que $\mathbb{E}(|\xi|) < \infty$. Montrer que la famille $(\mathbb{E}(\xi \,|\, \mathscr{G}), \, \mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ sous-tribu) est uniformément intégrable.

Exercice 9 Soit $(X_\alpha, \, \alpha \in A)$ une famile de variables aléatoires réelles. On suppose qu'il existe un réel $p > 1$ tel que $\sup_{\alpha \in A} \mathbb{E}(|X_\alpha|^p) < \infty$. Montrer que $(X_\alpha, \, \alpha \in A)$ est uniformément intégrable.

Exercice 10 Soit $(X_\alpha, \, \alpha \in A)$ une famile de variables aléatoires réelles. On suppose qu'il existe une variable aléatoire réelle intégrable Y telle que p.s. $\sup_{\alpha \in A} |X_\alpha| \le Y$. Montrer que $(X_\alpha, \, \alpha \in A)$ est uniformément intégrable. [2]

Exercice 11 Soit $(X_\alpha, \, \alpha \in A)$ une famile de variables aléatoires réelles intégrables. Montrer qu'elle est uniformément intégrable s'il existe une fonction mesurable $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ avec $\lim_{t \to \infty} \frac{h(t)}{t} = \infty$ telle que $\sup_{\alpha \in A} \mathbb{E}[h(|X_\alpha|)] < \infty$.

Exercice 12 Soit $(X_t, \, t \ge 0)$ une famille de variables aléatoires réelles indexée par $\mathbb{R}_+$, et soit X_∞ une variable aléatoire réelle. On suppose que $X_t \to X_\infty$ en probabilité (quand $t \to \infty$), et que $(X_t, \, t \ge 0)$ est uniformément intégrable. Montrer que $X_t \to X_\infty$ dans L^1.

Exercice 13 Soit $(X_n, \, n \ge 0)$ une famille de variables aléatoires réelles indexée par $\mathbb{Z}_+$, et soit X_∞ une variable aléatoire réelle. Montrer que $X_n \to X_\infty$ dans L^1 (quand $n \to \infty$) si et seulement si $X_n \to X_\infty$ en probabilité et $(X_n, \, n \ge 0)$ est uniformément intégrable.

2. En particulier, si $\sup_{\alpha \in A} |X_\alpha|$ est mesurable et intégrable, alors $(X_\alpha, \, \alpha \in A)$ est uniformément intégrable.