Annales d'exercices de calcul stochastique
(Lorenzo Zambotti, LPSM)

Exercice 1. Soit $\eta \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ une variable aléatoire indépendante de B. On définit

$$Y_t := \eta\, t + B_t, \qquad t \geq 0,$$

et $\mathcal{G}_t := \sigma(Y_s, s \in [0,t])$. On veut retrouver η à partir de l'observation du processus Y.

(1) Montrer que $(Y_t, t \geq 0)$ est un processus gaussien et calculer la loi de Y_t pour tout $t \geq 0$.

(2) Calculer $\mathrm{Cov}(\eta, Y_s)$, $\mathrm{Cov}(Y_s, Y_t)$ pour $s, t \geq 0$.

(3) Soit $t > 0$ fixé. Montrer qu'il existe un réel λ_t et une variable aléatoire Z_t indépendante de $\mathcal{G}_t$ tels que $\eta = \lambda_t Y_t + Z_t$. Quelle est la loi de Z_t ?

(4) Calculer $\mathbb{E}[\eta \,|\, \mathcal{G}_t]$ et la limite p.s. de $\mathbb{E}[\eta \,|\, \mathcal{G}_t]$ quand $t \to +\infty$.

(5) La variable η est-elle $\mathcal{G}_t$-mesurable ? Et $\mathcal{G}_\infty$-mesurable ?

Exercice 2. **(Polynômes d'Hermite)** Soit $M_0(t) = 1$ pour tout $t \geq 0$ et pour tout $n \geq 0$

$$M_{n+1}(t) = \int_0^t M_n(s)\,\mathrm{d}B_s, \qquad t \geq 0.$$

(1) Montrer par récurrence que

$$\mathbb{E}\left[(M_n(t))^2\right] = \frac{t^n}{n!}, \qquad t \geq 0,\ n \geq 0.$$

(2) Soit $T > 0$ fixé. Montrer qu'il existe $\alpha_0 > 0$ tel que pour tout $\alpha \in]-\alpha_0, \alpha_0[$ la série

$$L_\alpha(t) := \sum_{n \geq 0} \alpha^n M_n(t)$$

converge dans L^2 pour tout $t \in [0,T]$. Montrer la continuité p.s. des trajectoires de L_α.

(3) Montrer que L_α satisfait

$$L_\alpha(t) = 1 + \int_0^t L_\alpha(s)\,\alpha\,\mathrm{d}B_s, \qquad t \in [0,T].$$

(4) Pour $\alpha, x \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$ nous définissons

$$H(\alpha, x, c) := \exp\left(\alpha x - \frac{\alpha^2}{2} c\right), \qquad H_n(x,c) := \frac{\partial^n H}{\partial \alpha^n}(0, x, c).$$

Montrer que p.s. pour tout $n \geq 0$ nous avons $M_n(t) = H_n(B_t, t)/n!$, $t \geq 0$.

Exercice 3. Soit $g_1 := \sup\{t \leq 1 : B_t = 0\}$. Nous voulons montrer que le processus

$$\gamma_u := \frac{1}{\sqrt{g_1}}\, B_{g_1 u}, \qquad u \in [0,1],$$

est un pont brownien.

(1) Montrer que le processus $(tB_{\frac{1}{t}-1})_{t\in[0,1]}$ est un pont brownien.

(2) Montrer que p.s. $g_1 > 0$. La variable aléatoire g_1 est-elle un temps d'arrêt ?

(3) Soit $\hat{B}_t := tB_{\frac{1}{t}}$, $t \geq 0$. Montrer que $\hat{B}$ est un mouvement brownien. Soit $\hat{d}_1 := \inf\{t \geq 1 : \hat{B}_t = 0\}$; montrer que $\hat{d}_1 = 1/g_1$. La variable aléatoire $\hat{d}_1$ est-elle un temps d'arrêt ?

(4) Montrer que pour tout $u \in [0,1]$
$$\frac{1}{\sqrt{g_1}}\, B_{g_1 u} = \frac{u}{\sqrt{\hat{d}_1}} \left(\hat{B}_{\hat{d}_1+\hat{d}_1(\frac{1}{u}-1)} - \hat{B}_{\hat{d}_1}\right).$$
En déduire que $(\gamma_u)_{u\in[0,1]}$ est un pont brownien.

Exercice 4. Soit $M_t := \frac{1}{2}(B_t^2 - t)$, $t \geq 0$.

(1) Montrer que M est une martingale et en donner une expression comme intégrale stochastique.

(2) Montrer que pour tout $b \geq 0$, la martingale locale $\mathscr{E}(-bM)$ est une martingale. Pour un $T > 0$ fixé, définir la mesure de probabilité $\mathbb{Q} := \mathscr{E}(-bM)_T \cdot \mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathscr{F}_T)$.

(3) Calculer l'EDS satisfaite par $(B_t, t \in [0,T])$ sous $\mathbb{Q}$ et la loi de B_t sous $\mathbb{Q}$, $t \in [0,T]$.

(4) En déduire que pour tous $a, b \geq 0$
$$\mathbb{E}\left[\exp\left(-aB_t^2 - \frac{b^2}{2}\int_0^t B_s^2 \,\mathrm{d}s\right)\right] = \left(\frac{b}{b\cosh(bt) + 2a\sinh(bt)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(5) En rappellant que pour $\alpha, \beta > 0$ et $s \geq 0$
$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty \beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-(\beta+s)x}\,\mathrm{d}x = \left(\frac{\beta}{s+\beta}\right)^\alpha$$
calculer
$$\mathbb{E}\left[\exp\left(-\frac{b^2}{2}\int_0^t B_s^2\,\mathrm{d}s\right) \,\middle|\, B_t = y\right], \qquad b > 0,\ y \in \mathbb{R}.$$

Exercice 5. Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien.

(1) Montrer que pour tout $T < 1$ et $x \in \mathbb{R}$ il existe p.s. une seule solution de l'EDS
$$X_t^x = x + B_t - \int_0^t \frac{X_s^x}{1-s}\,\mathrm{d}s, \qquad t \in [0,T].$$

(2) En appliquant la formule d'Itô à $(\frac{X_t^0}{1-t})_{t\in[0,T]}$, obtenir une formule explicite pour $(X_t^0, t \in [0,T])$.

(3) Montrer que $X_t^x = X_t^0 + x(1-t)$, $t \in [0,T]$.

(4) Que se passe-t-il quand $T \to 1$?

(5) Le processus $(X_t^x, t \in [0,T])$ est-il une martingale ? une semi-martingale ? par rapport à quelle filtration ?

(6) Le processus $(X_t^x, t \in [0,T])$ est-il gaussien ? Peut-on identifier sa loi ?

Exercice 6. Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien dans $\mathbb{R}$. On rappelle que si $X \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$ alors $\mathbb{E}[e^X] = e^{\sigma^2/2}$. Soit pour $h \in L^2(0,1)$

$$\langle h, B\rangle := \int_0^1 h_s\, B_s\, \mathrm{d}s.$$

(1) Calculer la loi de $\langle h, B\rangle$ et $\lambda(h) := \mathbb{E}[e^{\langle h,B\rangle}]$.

(2) Donner une condition nécessaire et suffisante pour l'indépendance de $\langle h_1, B\rangle$ et $\langle h_2, B\rangle$.

(3) Définir une nouvelle mesure de probabilités par

$$\mathbb{P}^h(A) := \frac{1}{\lambda(h)}\, \mathbb{E}[\mathbb{1}_A\, e^{\langle h,B\rangle}].$$

Sous $\mathbb{P}^h$, quelle est la loi de $(B_t)_{t\in[0,1]}$?

(4) Calculer pour tout $k \in L^2(0,1)$

$$\mathbb{E}^h[e^{\langle k,B\rangle}],$$

où $\mathbb{E}^h$ est l'espérance sous $\mathbb{P}^h$.

(5) Donner une condition nécessaire et suffisante pour l'indépendance de $\langle k_1, B\rangle$ et $\langle k_2, B\rangle$ sous $\mathbb{P}^h$.

Exercice 7. Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien et $S_t = \sup_{s\in[0,t]} B_s$. On rappelle que, par le principe de réflexion, la densité de (S_t, B_t) est donnée par

$$f_t(a,b) = \frac{2(2a-b)}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{(2a-b)^2}{2t}\right) \mathbb{1}_{\{a>0,\, b<a\}}.$$

Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ le processus canonique sur $E := C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et $¶_x$ la loi de $(x + B_t)_{t\geq 0}$. Soit $\tau := \inf\{t > 0 : X_t = 0\}$, $\inf \emptyset := +\infty$.

(1) Pour toute $f :]0, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ borélienne bornée on définit

$$Q_t f(x) := \mathbb{E}_x(f(X_t)\, \mathbb{1}_{(\tau>t)}), \qquad t \geq 0,\, x > 0.$$

Montrer que pour $t > 0$, $Q_t f(x) = \int_{\mathbb{R}_+} f(y)\, q_t(x,y)\, \mathrm{d}y$, où

$$q_t(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \left(\exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2t}\right) - \exp\left(-\frac{(y+x)^2}{2t}\right)\right), \qquad x, y > 0.$$

(2) On veut montrer que $Q_{t+s} = Q_t Q_s$, c'est à dire que $(Q_t)_{t\geq 0}$ est un semigroupe. Utiliser la propriété de Markov du mouvement brownien ; si $\theta_t : E \mapsto E$ est l'opérateur de décalage $\theta_t(w) = w_{t+\cdot}$, remarquer que $\{\tau > t+s\} = \{\tau > t\} \cap \{\tau \circ \theta_t > s\}$.

(3) Montrer que $X_t \mathbb{1}_{(\tau>t)} = X_{t\wedge\tau}$ et en déduire la valeur de $\mathbb{E}_x(X_t\, \mathbb{1}_{(\tau>t)})$.

(4) Soit $p_t(x,y) := \frac{1}{x} q_t(x,y) y$, $x, y > 0$, $t > 0$, et $P_t f(x) := \int_{\mathbb{R}_+} f(y)\, p_t(x,y)\, \mathrm{d}y$. Montrer que $(P_t)_{t\geq 0}$ est un semigroupe avec $P_t \mathbf{1} = \mathbf{1}$, où $\mathbf{1}$ est la fonction constante égale à 1.

(5) Soit $p_t(y) := \lim_{x\downarrow 0} p_t(x,y)$. Montrer que $p_t(\cdot)$ est la densité de $|B_t^{(3)}|$, où $B^{(3)}$ est un MB dans $\mathbb{R}^3$ issu de 0.

Exercice 8. **(Développements de Taylor aléatoires)** Nous considérons un mouvement brownien standard $(B_t)_{t\geq 0}$ sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathbb{P})$, une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et bornée avec sa dérivée f' et $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $F' = f$.

Soient $T \geq 0$ et $\alpha \in]0, 1/2[$ fixés.

(1) Montrer qu'il existe une v.a. $K_1 \geq 0$ p.s. finie telle que pour tous $t, s \in [0, T]$

$$|F(B_t) - F(B_s)| \leq K_1 |t-s|^{\alpha},$$
$$|F(B_t) - F(B_s) - f(B_s)(B_t - B_s)| \leq K_1 |t-s|^{2\alpha}.$$

(2) Montrer qu'il existe une v.a. $K_2 \geq 0$ p.s. finie telle que pour tous $0 \leq s \leq t \leq T$

$$\left| \int_s^t f(B_u)\,\mathrm{d}B_u \right| \leq K_2 |t-s|^{\alpha}, \qquad \left| \int_s^t f(B_u)\,\mathrm{d}B_u - f(B_s)(B_t - B_s) \right| \leq K_2 |t-s|^{2\alpha}.$$

On pourra utiliser la formule d'Ito appliquée à $F(B_t)$.

(3) On suppose que f' est de classe C^1 avec dérivée f'' bornée. Montrer qu'il existe une v.a. $K_3 \geq 0$ p.s. finie telle que pour tous $0 \leq s \leq t \leq T$

$$\left| \int_s^t (B_u - B_s)\,\mathrm{d}B_u \right| \leq K_3 |t-s|^{2\alpha},$$
$$\left| \int_s^t f(B_u)\,\mathrm{d}B_u - f(B_s)(B_t - B_s) - f'(B_s) \int_s^t (B_u - B_s)\,\mathrm{d}B_u \right| \leq K_3 |t-s|^{3\alpha}.$$

On pourra utiliser une formule d'Ito appliquée au processus $[s, T] \ni t \mapsto (B_t - B_s)^2$.

(4) Soit maintenant $\alpha \in]1/3, 1/2[$. Montrer qu'il existe un seul processus $\gamma : [0, T] \to \mathbb{R}$ tel que p.s. pour une v.a. p.s. finie $C \geq 0$ et tous $0 \leq s \leq t \leq T$

$$\gamma_0 = 0, \qquad \left| \gamma_t - \gamma_s - f(B_s)(B_t - B_s) - f'(B_s) \int_s^t (B_u - B_s)\,\mathrm{d}B_u \right| \leq C |t-s|^{3\alpha}.$$

Exercice 9. Nous considérons un mouvement brownien standard $(B_t)_{t\geq 0}$ sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathbb{P})$, une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et bornée avec sa dérivée f' et $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $F' = f$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

(1) Montrer que

$$M_t := F(x + B_t) - F(x) - \frac{1}{2} \int_0^t f'(x + B_s)\,\mathrm{d}s, \qquad t \geq 0,$$

est une martingale.

(2) Soit pour $t \geq 0$

$$D_t := \exp\left(F(x + B_t) - F(x) - \frac{1}{2} \int_0^t f'(x + B_s)\,\mathrm{d}s - \frac{1}{2} \int_0^t (f(x + B_s))^2\,\mathrm{d}s \right)$$

et $\mathbb{Q}_T|_{\mathscr{F}_T} := D_T \cdot \mathbb{P}|_{\mathscr{F}_T}$ pour tout $T \geq 0$. Montrer que $(D_t)_{t\geq 0}$ est une martingale et que $\mathbb{Q}_T$ est une mesure de probabilité sur $\mathscr{F}_T$ pour tout $T \geq 0$.

(3) Montrer que sous $\mathbb{Q}_T$ le processus $(x + B_t)_{t\in[0,T]}$ est solution faible d'une EDS pour laquelle on a unicité trajectorielle.

(4) Quelle est la loi de $(x+B_t)_{t\in[0,T]}$ sous $\mathbb{Q}_T$?

Exercice 10. Soit $x>0$ et $B^{(3)}=(B^1,B^2,B^3)$ un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ défini sur $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t),\mathbb{P})$. On pose $\rho_t:=|\bar{x}+B_t^{(3)}|$, $t\geq 0$, où $\bar{x}:=(x,0,0)\in\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$.

(1) Montrer que $(\rho_t)_{t\geq 0}$ est une solution faible de l'EDS

$$\rho_t = x+\int_0^t \frac{1}{\rho_s}\,\mathrm{d}s+\beta_t, \qquad t\geq 0, \tag{1}$$

où β est un MB standard. (On pourra passer par l'EDS satisfaite par ρ_t^2 ou faire un calcul direct).

(2) Montrer que le processus

$$M_t := -\int_0^t \frac{1}{\rho_s}\,\mathrm{d}\beta_s, \qquad t\geq 0$$

définit une martingale locale. Si $D:=\mathscr{E}(M)$ est la martingale locale exponentielle de M, montrer que p.s.

$$D_t=\mathscr{E}(M)_t=\frac{x}{\rho_t}, \qquad t\geq 0.$$

(3) Montrer que D^{τ_ε} est une vraie martingale, où $\tau_\varepsilon:=\inf\{t>0:\rho_t=\varepsilon\}$ pour $0<\varepsilon<x$.

(4) Soit $T\geq 0$ et $\mathbb{Q}_T^\varepsilon|_{\mathscr{F}_T}:=D_T^{\tau_\varepsilon}\cdot\mathbb{P}|_{\mathscr{F}_T}$. Montrer que $(\rho_{t\wedge\tau_\varepsilon})_{t\in[0,T]}$ est une martingale sous $\mathbb{Q}_T^\varepsilon$ et en calculer le crochet.

(5) Soit $(W_t)_{t\geq 0}$ un MB standard indépendant de $B^{(3)}$ et

$$\gamma_t^\varepsilon := \rho_{t\wedge\tau_\varepsilon}+W_t-W_t^{\tau_\varepsilon}, \qquad t\geq 0.$$

Montrer que γ^ε sous $\mathbb{Q}_T^\varepsilon$ est un MB standard issu de x et p.s. $\tau_\varepsilon=\inf\{t>0:\gamma_t^\varepsilon=\varepsilon\}$.

(6) Montrer que pour toute fonctionnelle $\Phi: C([0,T])\to\mathbb{R}$ borélienne bornée

$$\mathbb{E}\left[\Phi(\rho_{t\wedge\tau_\varepsilon},t\in[0,T])\frac{x}{\rho_{T\wedge\tau_\varepsilon}}\right]=\mathbb{E}\left[\Phi(x+B_{t\wedge\sigma_\varepsilon},t\in[0,T])\right]$$

et en déduire que

$$\mathbb{E}\left[\Phi(\rho_{t\wedge\tau_\varepsilon},t\in[0,T])\right]=\mathbb{E}\left[\frac{x+B_{T\wedge\sigma_\varepsilon}}{x}\,\Phi(x+B_{t\wedge\sigma_\varepsilon},t\in[0,T])\right]$$

où $\sigma_\varepsilon:=\inf\{t>0:x+B_t=\varepsilon\}$.

(7) Montrer que

$$\mathbb{E}\left[\Phi(\rho_t,t\in[0,T])\right]=\mathbb{E}\left[\frac{x+B_T}{x}\mathbb{1}_{(\inf_{[0,T]}(x+B)>0)}\,\Phi(x+B_t,t\in[0,T])\right].$$

Comparer avec l'exercice 2 et interpréter le résultat.

Exercice 11. Soit $b : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ et $\sigma : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ de classe C^∞ et avec b', b'', σ' et σ'' bornées sur $\mathbb{R}$. Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien sur $\mathbb{R}$ et $(X_t(x))_{t\geq 0}$ la seule solution de l'équation

$$\mathrm{d}X_t = b(X_t)\,\mathrm{d}t + \sigma(X_t)\,\mathrm{d}B_t, \qquad X_0 = x \in \mathbb{R}.$$

Pour toute $f \in C_b(\mathbb{R})$ on note $\|f\|_\infty := \sup_{\mathbb{R}} |f|$ et l'on définit $u(t,x) := P_t f(x) = \mathbb{E}[f(X_t(x))]$.

(1) Soit x fixé et $\eta_t^\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon}(X_t(x+\varepsilon) - X_t(x))$. Montrer que $(\eta_t^\varepsilon(x))_{t\geq 0}$ satisfait une EDS du type

$$\mathrm{d}\eta_t^\varepsilon(x) = (h_t^\varepsilon\,\mathrm{d}t + k_t^\varepsilon\,\mathrm{d}B_t)\eta_t^\varepsilon(x) \tag{2}$$

avec h^ε et k^ε des processus progressivement mesurables et bornés.

(2) Considérer le processus auxiliaire $\zeta_t := \exp(-\int_0^t k_s^\varepsilon\,\mathrm{d}B_s + \frac{1}{2}\int_0^t (k_s^\varepsilon)^2\,\mathrm{d}s - \int_0^t h_s^\varepsilon\,\mathrm{d}s)$ et donner une expression explicite pour $(\eta_t^\varepsilon(x))_{t\geq 0}$.

(3) Montrer que pour toute sous-suite $(\varepsilon_n)_n$ il existe une sous-sous-suite $(n_k)_k$ telle que p.s. $\eta_t^{\varepsilon_{n_k}}(x) \to \eta_t(x)$ pour tout $t \geq 0$, où $(\eta_t(x))_{t\geq 0}$ est un processus continu solution d'un analogue de (2) et qui ne dépend pas des sous-suites considérées. En déduire que $\frac{1}{\varepsilon}(X_t(x+\varepsilon) - X_t(x)) \to \eta_t(x)$ en probabilité quand $\varepsilon \to 0$.

(4) Si $f \in C_b^1(\mathbb{R})$, montrer que $P_t f$ est différentiable en $x \in \mathbb{R}$, donner une formule pour $\partial_x P_t f(x)$ et montrer que $\sup_{t\in[0,T]} \|\partial_x P_t f\|_\infty < +\infty$.

(5) Soit $t > 0$ fixé et $f \in C_b^\infty(\mathbb{R})$. On peut admettre que $(t,x) \mapsto u(t,x)$ est de classe C^∞ et que

$$\sup_{t\in[0,T]} \left\|\partial_x^2 P_t f\right\|_\infty < +\infty.$$

Montrer que le processus $(u(t-s, X_s(x)))_{s\in[0,t]}$ est une martingale, et trouver un processus explicite $(\alpha_s^t)_{s\in[0,t]}$ tel que

$$f(X_t(x)) = u(t,x) + \int_0^t \alpha_s^t\,\mathrm{d}B_s. \tag{3}$$

Donner une majoration de $\mathbb{E}((\alpha_s^t)^2)$.

(6) On suppose que $\sigma \geq \delta > 0$. Multiplier (3) par $\int_0^t \sigma^{-1}(X_s(x))\,\eta_s(x)\,\mathrm{d}B_s$, utiliser l'isométrie d'Ito et le théorème de dérivation des fonctions composées, pour arriver à la formule

$$\partial_x u(t,x) = \frac{1}{t}\,\mathbb{E}\left[f(X_t(x))\int_0^t \sigma^{-1}(X_s(x))\,\eta_s(x)\,\mathrm{d}B_s\right].$$

Quelle interprétation peut-on donner de cette formule ?

Exercice 12. Soit $Z_t = (X_t, Y_t)$ un mouvement Brownien dans $\mathbb{R}^2$ issu de $x \neq 0$. L'*aire de Lévy* de Z est définie par

$$A_t := \int_0^t (X_s\,\mathrm{d}Y_s - Y_s\,\mathrm{d}X_s), \qquad t \geq 0.$$

(1) Définir explicitement un mouvement brownien standard $(\beta_t)_{t\geq 0}$ tel que

$$A_t = \int_0^t R_s \, \mathrm{d}\beta_s, \qquad t \geq 0,$$

où $R_s := |Z_s|$, $s \geq 0$.

On peut admettre dans les points (2) et (3) que $(\beta_t)_{t\geq 0}$ et $(R_t)_{t\geq 0}$ sont indépendants.

(2) Pour $t \geq 0$ fixé, calculer la loi conditionnelle de A_t sachant $(R_s)_{s\geq 0}$.

(3) En utilisant le point (4) de l'exercice 2, calculer

$$\mathbb{E}[\exp(i\lambda A_t) \,|\, R] \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[\exp(i\lambda A_t)], \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

(4) Montrer qu'il existe un mouvement brownien standard γ tel que

$$R_t = R_0 + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{1}{R_u} \, \mathrm{d}u + \gamma_t, \qquad t \geq 0.$$

(5) Montrer que γ est indépendant de β.

(6) En déduire que que β et R sont indépendants.

Exercice 13. Soit $x > 0$ et $B^{(3)} = (B^1, B^2, B^3)$ un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^3$. On note $\rho_t := |\bar{x} + B_t^{(3)}|$, $t \geq 0$, où $\bar{x} := (x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$, et $\mathbf{P}_x^3$ la loi de $(\rho_t)_{t\geq 0}$. On peut voir que $(\mathbf{P}_x^3)_{x\geq 0}$ forme une famille markovienne.

Sur l'espace canonique $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, nous définissons $T_a := \inf\{t \geq 0 : X_t = a\}$ où X est le processus canonique. D'après l'exemple 6.4.9 du polycopié nous avons

$$\mathbf{P}_x^3 \left(T_a < T_b\right) = \frac{x^{-1} - b^{-1}}{a^{-1} - b^{-1}}, \qquad 0 < a < x < b$$

et $(1/X_t)_{t\geq 0}$ est une martingale locale sous $\mathbf{P}_x^3$.

Soit $J_t := \inf_{u\geq t} X_u$ et $Y_t := 2J_t - X_t$, $t \geq 0$. On fixe $x > 0$. Dans cet exercice, on veut montrer que sous $\mathbf{P}_x^3$ le processus $(Y_t - Y_0)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien. Soient $a \geq 0$, $t \geq s \geq 0$ et $(\mathscr{F}_t^X)_{t\geq 0}$ la filtration canonique de X.

(1) Discuter pourquoi on peut appliquer la formule d'Itô à $|\bar{x} + B_t^{(3)}|$. En déduire que la variation quadratique de ρ est $\langle \rho \rangle_t = t$, $t \geq 0$.

(2) Montrer que, si Y est une martingale locale (par rapport à sa filtration canonique), alors $Y - Y_0$ doit être un MB issu de 0.

(3) Montrer que

$$\mathbf{P}_x^3(T_a < +\infty) = \mathbf{P}_x^3(J_0 \leq a) = \frac{a \wedge x}{x}, \qquad \mathbf{P}_x^3(J_0 > a) = (1 - ax^{-1}) \mathbb{1}_{(a<x)}.$$

(4) Montrer que

$$\mathbf{E}_x^3 \left[J_0 \, \mathbb{1}_{(J_0 > a)} \right] = \frac{1}{2}(x - a^2 x^{-1}) \mathbb{1}_{(a<x)}.$$

(5) En appliquant la propriété de Markov, montrer que p.s.

$$\mathbf{E}_x^3 \left[(2J_s - X_s) \, \mathbb{1}_{(J_s > a)} \,\middle|\, \mathscr{F}_s^X \right] = (a - a^2 X_s^{-1}) \mathbb{1}_{(a<X_s)}.$$

(6) Montrer que p.s.

$$\mathbf{E}_x^3\left[Y_t\,\mathbb{1}_{(J_s>a)}\,|\,\mathscr{F}_t^X\right] = \mathbf{E}_x^3\left[Y_t\,\mathbb{1}_{(J_t>a)}\,|\,\mathscr{F}_t^X\right]\mathbb{1}_{(\inf_{s\le u\le t} X_u>a)}.$$

(7) Montrer que p.s.

$$\mathbf{E}_x^3\left[Y_t\,\mathbb{1}_{(J_s>a)}\,|\,\mathscr{F}_s^X\right] = \mathbf{E}_x^3\left[(a-a^2X_t^{-1})\mathbb{1}_{(\inf_{s\le u\le t} X_u>a)}\,|\,\mathscr{F}_s^X\right].$$

(8) Montrer que p.s.

$$\mathbf{E}_x^3\left[Y_t\,\mathbb{1}_{(J_s>a)}\,|\,\mathscr{F}_s^X\right] = \mathbf{E}_{X_s}^3\left[\left(a-a^2X_{(t-s)\wedge T_a}^{-1}\right)\right]\mathbb{1}_{(a<X_s)} = \left(a-a^2X_s^{-1}\right)\mathbb{1}_{(a<X_s)}.$$

(9) Montrer que $\mathscr{G}_t := \mathscr{F}_t^X \vee \sigma(J_t)$ définit une filtration.

(10) Montrer que $(Y_t)_{t\ge0}$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathscr{G}_t)_{t\ge0}$ et en déduire que $Y-Y_0$ est un MB.

Ce résultat vaut aussi pour $x=0$ et a comme conséquence un théorème important dû à Jim Pitman : si B est un MB issu de 0 et $S_t=\sup_{s\le t} B_s$, alors le processus $(2S_t-B_t)_{t\ge0}$ a loi $\mathbf{P}_0^3$.