

EXAMEN 4 mai 2026
 Rough Paths
 M2 Probabilités et Modèles Aléatoires

D'abord, quelques commentaires :

- (1) En corrigeant les copies, je me suis aperçu d'un problème dans la question 4 de l'exercice 2, aussi grâce aux doutes de quelques uns de vous. Maintenant c'est corrigé, je demande pardon.
- (2) L'un des buts principaux de ce cours est d'apprendre à utiliser la borne de couture. Une faute fréquente consiste à affirmer que : si $|\delta R_{sut}| \lesssim |t-s|^\eta$ avec $\eta > 1$, alors $|R_{st}| \lesssim |t-s|^\eta$. Cela est faux : il suffit de considérer $R_{st} = t-s$, pour trouver $\delta R \equiv 0$ et

$$\sup_{0 < s < t < 1} \frac{t-s}{|t-s|^\eta} = +\infty.$$

L'énoncé de la borne de couture est : SI $R_{st} = o(t-s)$, alors $\|R\|_\eta \leq K_\eta \|\delta R\|_\eta$ pour tout $\eta > 1$. L'hypothèse $R_{st} = o(t-s)$ doit être vérifiée à part.

Dans l'exercice 2, ce point est important :

- (a) Dans la question 2, le seul outil à disposition pour prouver que $\|\mathbb{B}^2\|_{2\alpha} < +\infty$ et $\|\mathbb{B}^3\|_{3\alpha} < +\infty$ est le Théorème 4.1 du cours.
- (b) Dans la question 4, on doit majorer $\|R^n\|_{3\alpha} \lesssim \|\delta R^n\|_{3\alpha}$, et pour utiliser la borne de couture il faut prouver d'abord que $R_{st}^n = o(t-s)$: peu d'entre vous l'ont fait (voir la correction ci-dessous pour l'argument complet).
- (c) Dans la question 6 on peut prouver que $\|R^Y\|_{3\alpha} < +\infty$ sans la borne de couture.
- (d) Dans la question 10, on n'utilise pas à nouveau la borne de couture.
- (e) Dans les questions 9 et 12 on doit appliquer la borne de couture mais il faut d'abord montrer que $\mathbb{B}_{st}^n = o(t-s)$, respectivement $Y_{st}^{[n]} = o(t-s)$.
- (3) Dans la question 2 de l'exercice 2, on ne peut pas dire que $|\mathbb{B}_{st}^3| \lesssim |t-s|^{3\alpha}$ parce que $|\mathbb{B}_{st}^2| \lesssim |t-s|^{2\alpha}$ et $\mathbb{B}_{st}^3 = \int_s^t \mathbb{B}_{sr}^2 dB_r$: le seul moyen que je connaisse est appliquer le point 3 du Théorème 4.1 au reste $J_t^{(3)} - J_s^{(3)} - J_s^{(2)} \mathbb{B}_{st}^1 - J_s^{(1)} \mathbb{B}_{st}^2$.

Durée 3h.

Dans tout le sujet, nous considérons un mouvement brownien standard $B = (B_t)_{t \geq 0}$ sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$.

Exercice 1. Définir $Z_t := \exp\left(\lambda B_t - \frac{\lambda^2 t}{2}\right)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$ fixé.

- (1) Montrer que Z satisfait l'EDS au sens d'Itô :

$$Z_t = 1 + \int_0^t \lambda Z_s dB_s, \quad t \geq 0. \tag{1}$$

- (2) Quelle équation *rough* est résolue par Z ? Donner le développement local de Z avec un reste $o(t-s)$ par rapport à un *rough path* approprié.

Exercice 2. Définir pour $n \geq 0$ et $0 \leq s \leq t$

$$\begin{aligned}\mathbb{B}_{st}^0 &:= 1, & \mathbb{B}_{st}^{n+1} &:= \int_s^t \mathbb{B}_{sr}^n dB_r, \\ J_t^{(0)} &:= 1, & J_t^{(n+1)} &:= \int_0^t J_s^{(n)} dB_s.\end{aligned}$$

Fixer $\alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ et $T > 0$.

- (1) Montrer (par exemple par récurrence) que pour $n \geq 0$:

$$\mathbb{B}_{st}^n = J_t^{(n)} - \sum_{i=0}^{n-1} J_s^{(n-i)} \mathbb{B}_{st}^i$$

(la somme de 0 à -1 est nulle par définition).

- (2) Montrer, à l'aide d'un résultat sur les développements locaux pour les intégrales d'Itô, que pour $n = 1, 2, 3$, p.s.

$$|\mathbb{B}_{st}^n| \lesssim |t-s|^{n\alpha}, \quad 0 \leq s \leq t \leq T.$$

- (3) Définir pour $n \geq 0$ les deux restes :

$$\begin{aligned}r_{st}^n &:= \delta J_{st}^{(n)} - J_s^{(n-1)} \mathbb{B}_{st}^1, & 0 \leq s \leq t, \\ R_{st}^n &:= \delta J_{st}^{(n)} - J_s^{(n-1)} \mathbb{B}_{st}^1 - J_s^{(n-2)} \mathbb{B}_{st}^2, & 0 \leq s \leq t,\end{aligned}$$

avec $J^{(-1)} = J^{(-2)} := 0$. Montrer que

$$r^0 = R^0 \equiv 0, \quad r^1 = R^1 \equiv 0, \quad R^2 \equiv 0,$$

et calculer δR^n en fonction de r^{n-1} et $J^{(n-2)}$.

- (4) Montrer qu'il existe une constante $C = C_{T, \alpha, \|\mathbb{B}^1\|_\alpha, \|\mathbb{B}^2\|_{2\alpha}} > 0$ telle que

$$\begin{aligned}& \|\delta J^{(n)}\|_\alpha + \|\delta J^{(n-1)}\|_\alpha + \|\delta J^{(n-2)}\|_\alpha + \|R^n\|_{3\alpha} \\ & \leq C \left(\|\delta J^{(n-1)}\|_\alpha + \|\delta J^{(n-2)}\|_\alpha + \|\delta J^{(n-3)}\|_\alpha + \|R^{n-1}\|_{3\alpha} \right)\end{aligned}$$

pour tout $n \geq 3$. Conseil : utiliser la notation $x \lesssim y$ à la place de $x \leq Cy$ si la constante C dépend uniquement de $T, \alpha, \|\mathbb{B}^1\|_\alpha, \|\mathbb{B}^2\|_{2\alpha}$. Donc en particulier on veut prouver que pour tout $n \geq 3$

$$\begin{aligned}& \|\delta J^{(n)}\|_\alpha + \|\delta J^{(n-1)}\|_\alpha + \|\delta J^{(n-2)}\|_\alpha + \|R^n\|_{3\alpha} \\ & \lesssim \|\delta J^{(n-1)}\|_\alpha + \|\delta J^{(n-2)}\|_\alpha + \|\delta J^{(n-3)}\|_\alpha + \|R^{n-1}\|_{3\alpha}.\end{aligned}$$

- (5) Montrer

$$\begin{aligned}& \|\delta J^{(1)}\|_\alpha + \|\delta J^{(0)}\|_\alpha + \|R^1\|_{3\alpha} \lesssim 1, \\ & \|\delta J^{(2)}\|_\alpha + \|\delta J^{(1)}\|_\alpha + \|\delta J^{(0)}\|_\alpha + \|R^2\|_{3\alpha} \lesssim 1, \\ & \|\delta J^{(n)}\|_\alpha + \|\delta J^{(n-1)}\|_\alpha + \|R^n\|_{3\alpha} \lesssim C^n, \quad n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

(6) Fixer $\lambda \in \mathbb{R}$ avec $|\lambda| < C^{-1}$ et définir (avec la convention $0^0 := 1$)

$$Y_t = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i J_t^{(i)}, \quad R_{st}^Y := \delta Y_{st} - \lambda Y_s \mathbb{B}_{st}^1 - \lambda^2 Y_s \mathbb{B}_{st}^2.$$

Montrer que Y et R^Y sont bien définis et que $\|R^Y\|_{3\alpha} < +\infty$.

(7) Quelle est l'équation *rough* satisfaite par Y ? Quelle est l'EDS à la Itô satisfaite par Y ? En déduire une formule explicite pour Y .

(8) Montrer (par exemple par récurrence) la relation de Chen pour $(\mathbb{B}^n)_{n \geq 1}$:

$$\delta \mathbb{B}_{sut}^n = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{B}_{su}^k \mathbb{B}_{ut}^{n-k}, \quad n \geq 1,$$

(9) Montrer par récurrence et à l'aide de la borne de couture que p.s.

$$|\mathbb{B}_{st}^n| \lesssim |t-s|^{n\alpha}, \quad 0 \leq s \leq t \leq T, \quad n \geq 4.$$

Préciser la différence entre le cas $n \leq 3$ et $n \geq 4$.

(10) Définir pour $n \geq 0$:

$$Y_{st}^{[n]} := Y_t - Y_s \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^i \mathbb{B}_{st}^i$$

Montrer que pour $n = 1, 2, 3$, p.s.

$$|Y_{st}^{[n]}| \lesssim |t-s|^{n\alpha}, \quad 0 \leq s \leq t \leq T.$$

(11) Montrer (par exemple par récurrence) que pour tout $n \geq 1$

$$\delta Y_{sut}^{[n]} = \sum_{i=1}^{n-1} Y_{su}^{[n-i]} \lambda^i \mathbb{B}_{ut}^i.$$

(12) Montrer à l'aide de la borne de couture que pour tout $n \geq 4$, p.s.

$$|Y_{st}^{[n]}| \lesssim |t-s|^{n\alpha}, \quad 0 \leq s \leq t \leq T.$$

(13) Interpréter et discuter ce dernier résultat.

Solution de l'exercice 1.

- (1) Il s'agit d'une application classique de la formule d'Itô.
(2) L'équation (1) est une EDS à la Itô avec coefficient de diffusion $\sigma(z) = \lambda z$. Le cours nous apprend que l'équation *rough* est basée sur les coefficients σ et $\sigma_2 := \sigma'\sigma$. Ici $\sigma_2(z) = \lambda^2 z$. Nous avons donc

$$Z_t - Z_s - \lambda Z_s (B_t - B_s) - \lambda^2 Z_s \frac{(B_t - B_s)^2 - (t - s)}{2} = o(t - s).$$

Ici, en une dimension, le *rough path* de Itô est donné par $\mathbb{B}_{st}^1 = B_t - B_s$ et $\mathbb{B}_{st}^2 = \frac{(B_t - B_s)^2 - (t - s)}{2}$.

Solution de l'exercice 2.

- (1) L'égalité est vraie pour $n = 0$; or

$$\begin{aligned} \mathbb{B}_{st}^{n+1} &= \int_s^t \mathbb{B}_{sr}^n dB_r = \int_s^t \left(J_r^{(n)} - \sum_{i=0}^{n-1} J_s^{(n-i)} \mathbb{B}_{sr}^i \right) dB_r \\ &= J_t^{(n+1)} - J_s^{(n+1)} - \sum_{i=0}^{n-1} J_s^{(n-i)} \mathbb{B}_{st}^{i+1} = J_t^{(n+1)} - \sum_{i=0}^n J_s^{(n+1-i)} \mathbb{B}_{st}^i. \end{aligned}$$

- (2) Pour $n = 1$ nous avons $|\mathbb{B}_{st}^1| = |B_t - B_s| \lesssim |t - s|^\alpha$. Pour $n = 2$ nous avons

$$\mathbb{B}_{st}^2 = \int_s^t (B_r - B_s) dB_r = J_t^{(2)} - J_s^{(2)} - J_s^{(1)}(B_t - B_s)$$

et par le point 2 du Théorème 4.1 du cours nous obtenons $|\mathbb{B}_{st}^2| \lesssim |t - s|^{2\alpha}$. Enfin

$$\begin{aligned} \mathbb{B}_{st}^3 &= \int_s^t \left(J_r^{(2)} - J_s^{(2)} - J_s^{(1)}(B_r - B_s) \right) dB_r \\ &= J_t^{(3)} - J_s^{(3)} - J_s^{(2)} \mathbb{B}_{st}^1 - J_s^{(1)} \mathbb{B}_{st}^2 \end{aligned}$$

et on en déduit par le point 3 du Théorème 4.1 du cours que p.s. $|\mathbb{B}_{st}^3| \lesssim |t - s|^{3\alpha}$.

- (3) Pour tout $n \geq 0$

$$\begin{aligned} \delta R_{sut}^n &= \left(\delta J_{su}^{(n-1)} - J_s^{(n-2)} \mathbb{B}_{su}^1 \right) \mathbb{B}_{ut}^1 + \delta J_{su}^{(n-2)} \mathbb{B}_{ut}^2 \\ &= r_{su}^{n-1} \mathbb{B}_{ut}^1 + \delta J_{su}^{(n-2)} \mathbb{B}_{ut}^2. \end{aligned}$$

En particulier

$$\|\delta R^n\|_{3\alpha} \lesssim \|r^{n-1}\|_{2\alpha} + \|\delta J^{(n-2)}\|_{\alpha}.$$

- (4) Pour $n \geq 3$ nous avons $J_0^{(n-1)} = J_0^{(n-2)} = 0$ et donc

$$\begin{aligned} \|\delta J^{(n)}\|_{\alpha} &\leq \|J^{(n-1)}\|_{\infty} \|\mathbb{B}^1\|_{\alpha} + \|J^{(n-2)}\|_{\infty} \|\mathbb{B}^2\|_{\alpha} + \|R^n\|_{\alpha} \\ &\leq T^{\alpha} \|\delta J^{(n-1)}\|_{\alpha} \|\mathbb{B}^1\|_{\alpha} + T^{\alpha} \|\delta J^{(n-2)}\|_{\alpha} \|\mathbb{B}^2\|_{\alpha} + T^{2\alpha} \|R^n\|_{3\alpha} \\ &\lesssim \|\delta J^{(n-1)}\|_{\alpha} + \|\delta J^{(n-2)}\|_{\alpha} + \|R^n\|_{3\alpha}. \end{aligned}$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned} & \|\delta J^{(n)}\|_\alpha + \|\delta J^{(n-1)}\|_\alpha + \|\delta J^{(n-2)}\|_\alpha + \|R^n\|_{3\alpha} \\ & \lesssim \|\delta J^{(n-1)}\|_\alpha + \|\delta J^{(n-2)}\|_\alpha + \|R^n\|_{3\alpha}. \end{aligned}$$

Maintenant nous voulons appliquer la borne de couture pour majorer $\|R^n\|_{3\alpha}$. Pour cela nous devons montrer que p.s. $R_{st}^n = o(t-s)$. Cela suit du Théorème 4.1 du cours avec $I = J^{(n)}$, $h = J^{(n-1)}$ et $h^1 = J^{(n-2)}$, qui implique $|R_{st}^n| \lesssim |t-s|^{3\alpha}$ presque surement ; pour cela il faut aussi $J^{(n-2)} \in C^\alpha$, qui suit par récurrence.

Nous avons donc

$$\|R^n\|_{3\alpha} \lesssim \|\delta R^n\|_{3\alpha} \lesssim \|r^{n-1}\|_{2\alpha} + \|\delta J^{(n-2)}\|_\alpha$$

par le point précédent. Maintenant $\|r^{n-1}\|_{2\alpha} \lesssim \|R^{n-1}\|_{2\alpha} + \|\delta J^{(n-3)}\|_\alpha$, donc

$$\begin{aligned} & \|\delta J^{(n)}\|_\alpha + \|\delta J^{(n-1)}\|_\alpha + \|R^n\|_{3\alpha} \\ & \lesssim \|\delta J^{(n-1)}\|_\alpha + \|\delta J^{(n-2)}\|_\alpha + \|\delta J^{(n-3)}\|_\alpha + \|R^{n-1}\|_{2\alpha}. \end{aligned}$$

En conclusion

$$\begin{aligned} & \|\delta J^{(n)}\|_\alpha + \|\delta J^{(n-1)}\|_\alpha + \|\delta J^{(n-2)}\|_\alpha + \|R^n\|_{3\alpha} \\ & \lesssim \|\delta J^{(n-1)}\|_\alpha + \|\delta J^{(n-2)}\|_\alpha + \|\delta J^{(n-3)}\|_\alpha + \|R^{n-1}\|_{3\alpha}. \end{aligned}$$

(5) Pour $n = 1, 2$

$$\begin{aligned} \|\delta J^{(0)}\|_\alpha &= \|R^1\|_{2\alpha} = \|R^2\|_{2\alpha} = 0, & \|\delta J^{(1)}\|_\alpha &= \|\mathbb{B}^1\|_\alpha \lesssim 1, \\ \|\delta J^{(2)}\|_\alpha &\leq T^\alpha \|\delta J^{(1)}\|_\alpha \|\mathbb{B}^1\|_\alpha + \|\mathbb{B}^2\|_\alpha \\ &\leq T^\alpha (\|\mathbb{B}^1\|_\alpha)^2 + T^\alpha \|\mathbb{B}^2\|_{2\alpha} \lesssim 1. \end{aligned}$$

Par le point précédent

$$\|\delta J^{(i)}\|_\alpha + \|\delta J^{(i-1)}\|_\alpha + \|R^i\|_{3\alpha} \lesssim C^i, \quad i \in \mathbb{N}.$$

(6) Par le point précédent

$$\|Y\|_\infty \leq 1 + T^\alpha \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^i \|\delta J^{(i)}\|_\alpha \leq 1 + T^\alpha \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^i C^i < +\infty.$$

Maintenant :

$$\begin{aligned} R_{st}^Y &= \delta Y_{st} - \lambda Y_s \mathbb{B}_{st}^1 - \lambda^2 Y_s \mathbb{B}_{st}^2 \\ &= \sum_{i \geq 0} \lambda^i \left(\delta J_{st}^{(i)} - J_s^{(i-1)} \mathbb{B}_{st}^1 - J_s^{(i-2)} \mathbb{B}_{st}^2 \right) = \sum_{i \geq 0} \lambda^i R_{st}^i \end{aligned}$$

d'où

$$\|R^Y\|_{3\alpha} \lesssim \sum_{i \geq 0} \lambda^i \|R^i\|_{3\alpha} \leq \sum_{i \geq 0} (\lambda C)^i < +\infty.$$

(7) Nous avons obtenu en particulier

$$Y_t - Y_s - \lambda Y_s \mathbb{B}_{st}^1 - \lambda^2 Y_s \mathbb{B}_{st}^2 = o(t-s)$$

ce qui correspond à une équation *rough* à la Itô, avec coefficient $\sigma(y) = \lambda y$, d'où $\sigma_2(y) = \sigma' \sigma(y) = \lambda^2 y$. L'EDS correspondante est

$$Y_t = 1 + \int_0^t \lambda Y_s dB_s$$

qui est égale à l'EDS (1) et a donc Z comme unique solution.

(8) Le cas $n = 0$ est $\delta \mathbb{B}^1 = 0$, pour la récurrence nous trouvons :

$$\begin{aligned} \delta \mathbb{B}_{sut}^{n+1} &= \int_u^t (\mathbb{B}_{sr}^n - \mathbb{B}_{ur}^n) dB_r \\ &= \int_u^t \delta \mathbb{B}_{sur}^n dB_r + \mathbb{B}_{su}^n \mathbb{B}_{ut}^1 \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{B}_{su}^k \int_u^t \mathbb{B}_{ur}^{n-k} dB_r + \mathbb{B}_{su}^n \mathbb{B}_{ut}^1 \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{B}_{su}^k \mathbb{B}_{ut}^{n+1-k} + \mathbb{B}_{su}^n \mathbb{B}_{ut}^1 = \sum_{k=1}^n \mathbb{B}_{su}^k \mathbb{B}_{ut}^{n+1-k}. \end{aligned}$$

(9) On raisonne par récurrence sur $n \geq 3$. Nous savons par le point 2 que la formule est vraie pour $n = 1, 2, 3$. Supposons que la formule soit vraie pour tout $i = 1, \dots, n$, avec $n \geq 3$. Alors

$$\delta \mathbb{B}_{sut}^{n+1} = \sum_{k=1}^n \mathbb{B}_{su}^k \mathbb{B}_{ut}^{n+1-k}$$

et par récurrence l'expression à droite est $\lesssim |t-s|^{(n+1)\alpha}$. Pour utiliser la borne de couture il faut vérifier préalablement que $\mathbb{B}_{st}^{n+1} = o(t-s)$. Pour cela on sait que

$$\begin{aligned} \mathbb{B}_{st}^{n+1} &= \delta J_{st}^{(n+1)} - J_s^{(n)} \mathbb{B}_{st}^1 - J_s^{(n-1)} \mathbb{B}_{st}^2 - \sum_{i=3}^n J_s^{(n+1-i)} \mathbb{B}_{st}^i \\ &= R_{st}^{n+1} - \sum_{i=3}^n J_s^{(n+1-i)} \mathbb{B}_{st}^i. \end{aligned}$$

Or $R_{st}^{n+1} = o(t-s)$ comme discuté dans la correction du point 4 et $\|\mathbb{B}^i\|_{3\alpha} < +\infty$ pour $3 \leq i \leq n$ par l'hypothèse de récurrence.

(10) Remarquons que $Y^{[3]} \equiv R^Y$, donc p.s. $\|Y^{[3]}\|_{3\alpha} < +\infty$ par le point 6. Or

$$Y_{st}^{[1]} = R_{st}^Y + \lambda Y_s \mathbb{B}_{st}^1 + \lambda^2 Y_s \mathbb{B}_{st}^2,$$

donc pour $n = 1, 2$

$$\|Y^{[n]}\|_{n\alpha} \leq \|R^Y\|_{n\alpha} + \sum_{i=n}^2 \lambda^i \|Y\|_{\infty} \|\mathbb{B}^i\|_{n\alpha} < +\infty.$$

(11)

$$\begin{aligned}
\delta Y_{sut}^{[n+1]} &= Y_s \sum_{i=1}^n \lambda^i (\mathbb{B}_{su}^i - \mathbb{B}_{st}^i) + Y_u \sum_{i=1}^n \lambda^i \mathbb{B}_{ut}^i \\
&= -Y_s \sum_{i=1}^n \lambda^i \delta \mathbb{B}_{sut}^i + \delta Y_{su} \sum_{i=1}^n \lambda^i \mathbb{B}_{ut}^i \\
&= -Y_s \sum_{i=1}^n \lambda^i \sum_{k=1}^{i-1} \mathbb{B}_{su}^k \mathbb{B}_{ut}^{i-k} + \delta Y_{su} \sum_{i=1}^n \lambda^i \mathbb{B}_{ut}^i \\
&= -Y_s \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{B}_{su}^k \sum_{i=k+1}^n \lambda^i \mathbb{B}_{ut}^{i-k} + \delta Y_{su} \sum_{i=1}^n \lambda^i \mathbb{B}_{ut}^i \\
&= -Y_s \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{B}_{su}^k \lambda^k \sum_{i=1}^{n-k} \lambda^i \mathbb{B}_{ut}^i + \delta Y_{su} \sum_{i=1}^n \lambda^i \mathbb{B}_{ut}^i \\
&= \sum_{i=1}^n Y_{su}^{[n+1-i]} \lambda^i \mathbb{B}_{ut}^i
\end{aligned}$$

(12) Pour $n = 4$ nous obtenons

$$\delta Y_{sut}^{[4]} = \sum_{i=1}^3 Y_{su}^{[4-i]} \lambda^i \mathbb{B}_{ut}^i$$

et dans ce cas

$$|\delta Y_{sut}^{[4]}| \lesssim |u - s|^{(4-i)\alpha} |t - u|^{i\alpha} \lesssim |t - s|^{4\alpha}.$$

La borne de couture nous dit que, si $Y_{st}^{[4]} = o(t - s)$, alors

$$\|Y^{[4]}\|_{4\alpha} \leq K \|\delta Y^{[4]}\|_{4\alpha} < +\infty.$$

Pour prouver que $Y_{st}^{[4]} = o(t - s)$, nous voyons que

$$Y_{st}^{[4]} = Y_{st}^{[3]} - \lambda^3 \mathbb{B}_{st}^3$$

et $Y_{st}^{[3]} = o(t - s)$ par le point 10, $\mathbb{B}_{st}^3 = o(t - s)$ par le point 2. Pour le cas général, on raisonne par récurrence de la même façon. Par le point 7 :

$$\delta Y_{sut}^{[n+1]} = \sum_{i=1}^n Y_{su}^{[n+1-i]} \lambda^i \mathbb{B}_{ut}^i.$$

Par récurrence, $\|Y^{[n+1-i]}\|_{(n+1-i)\alpha} < +\infty$ et $\|\mathbb{B}^i\|_{i\alpha} < +\infty$ par le point 9. On prouve que $Y_{st}^{[n+1]} = o(t - s)$ en raisonnant comme pour $Y^{[4]}$.

(13) Avec la construction précédente, nous avons obtenu p.s. un développement de Taylor généralisé de la solution de l'EDS (1) avec un reste arbitrairement petit.