Exercice 1.

1. *Montrer que* $\{x \leftrightarrow y\}$ *est mesurable. Montrer que* $|C(x)|$ *est mesurable.*

2. *Montrer que l'événement* $x \leftrightarrow \infty$ *est un événement croissant.*

3. *Soient* A *un évènement croissant et* B *un évènement décroissant. Montrer que* $A \circ B = A$.

4. *Montrer que pour des événements croissants* $A_1, \ldots, A_n$*, on a :*
$$\max\{\mathbb{P}_p(A_i), i \leq n\} \geq 1 - (1 - \mathbb{P}_p(A_1 \cup \ldots \cup A_n))^{1/n}.$$

5. *Montrer rigoureusement que si* G *est un graphe transitif, alors pour tout* $x \in V$, $|C(x)|$ *a la même loi.*

Exercice 2 (Percolation sur un graphe.)**.** *Soit* $G = (E, V)$ *un graphe infini connexe. On considère la percolation par arêtes sur* G.

1. *Soit* $\Theta_G(p)$ *la probabilité sous* $\mathbb{P}_p$ *qu'il existe un agrégat infini. Montrer que pour tout* $p \in [0,1]$, $\Theta_G(p) \in \{0,1\}$.

2. *Montrer que* Θ *est croissante.*

On définie $p_c(G) = \sup\{p \in [0,1]; \Theta(p) = 0\}$. *On fixe maintenant un* $x \in G$. *On note par* $C(x)$ *l'agrégat de* x. *Comme le graphe n'est pas nécessairement transitif, la loi de* $C(x)$ *dépend à priori de* x. *Ainsi, la percolation en deux sommets distincts de* G *ne relève pas de la même étude. Par contre, on va montrer que la probabilité critique est la même quel que soit le somme considéré. On définit alors* $\theta_{G,x}(p)$ *par:*
$$\theta_{G,x}(p) = \mathbb{P}_p(x \leftrightarrow \infty).$$

3. *Montrer que* $\theta_{G,x}$ *est croissante.*

On définit alors $p_c(G,x) = \sup\{p \in [0,1]; \theta_{G,x}(p) = 0\}$.

4. *Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes:*
   (a) $\Theta_G(p) = 1$.
   (b) *Il existe* $x \in G$ *tel que* $\theta_{G,x}(p) > 0$.
   (c) *Pour tout* $x \in G$, $\theta_{G,x}(p) > 0$.

5. *En déduire que pour tout* $x \in G$, $p_c(G,x) = p_c(G)$.

6. *Soit* H *un sous-graphe d'un graphe* G*, montrer que* $p_c(H) \geq p_c(G)$.

Exercice 3. *Soit* $G = (E, V)$ *un graphe connexe infini. Soit* o *un sommet de* G. *Un sous-ensemble d'arêtes* $A \subset E$ *est appelé un ensemble de coupure pour* o *si en enlevant* A *de* G*, le sommet* o *se trouve dans une composante connexe finie. De manière équivalente, tout chemin simple infini commençant à* o *doit traverser* A. G *est dit unidimensionnel s'il existe un sommet* $o \in G$ *et une suite d'ensembles de coupure disjoints* $(A_n)_{n\in}$ *pour* o *telle que* $\sup_{n\in} |A_n| < \infty$.

1. *Montrer que si G est uni-dimensionnel, $p_c(G) = 1$.*

2. *Montrer que $Z \times \{0, \ldots, n\}$ est unidimensionnel. Déduire que $p_c(Z \times \{0, \ldots, n\}) = 1$.*

Exercice 4. *Soit $G = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$ un graphe. Pour un sommet x, on note par $V(x)$ l'ensemble des voisins de x. Montrer que:*

$$p_c(G) \geq \frac{1}{\sup_{x \in \mathbb{V}} |V(x)| - 1}.$$

Exercice 5. *Soit G un graphe connexe sur lequel on considère la percolation par arêtes. Montrer que $p \mapsto \theta(p)$ est strictement croissante pour $p > p_c$.*

Exercice 6. *Soit G un graphe infini et connexe. Soit $x \in G$ un sommet fixé. On appelle qu'un ensemble de coupure est un ensemble Π d'arêtes tel que tout chemin infini auto-évitant démarrant à x doit traverser une arête de Π. Un ensemble de coupure minimal est un ensemble Π tel que pour toute arête $e \in \Pi$, l'ensemble $\Pi \setminus \{e\}$ n'est pas un ensemble de coupure (c'est-à-dire que Π est minimal par rapport à l'inclusion). Soit G un graphe infini connexe.*

1. *Montrer que tout ensemble de coupure fini doit contenir un ensemble de coupure minimal.*

2. *Montrer que pour la percolation sur G, $x \leftrightarrow \infty$ si, et seulement si, pour chaque ensemble de coupure minimale finie Π, Π contient au moins une arête ouverte.*

3. *Soit C_n l'ensemble des ensembles de coupure minimale de taille n. Montrer que s'il existe n_0 et $M > 1$ tels que $|C_n| \leq M^n$ pour tout $n > n_0$, alors $p_c(G) \leq \frac{M-1}{M}$.*

Exercice 7 (Percolation sur un arbre de degré d.)**.** *On considère un arbre enraciné infini T de degré $d \geq 3$, c'est à dire un arbre dont tous les sommets sauf un ont d voisins. Le sommet restant en a $d-1$ et est appelé la racine. On considère une percolation de Berounilli sur T. On note par T_n les sommets de T qui sont à n générations de la racine.*

1. *Montrer que $(|C(0) \cap T_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est un processus de Galton-Watson de loi de reproduction $Bin(d-1, p)$, en déduire que $p_c(T) = \frac{1}{d-1}$.*

On considère maintenant un arbre infini $\mathbb{T}$ de degré d, c'est à dire, un graphe infini connexe sans cycles.

2. *Soit $o \in \mathbb{T}$ et soient $x_1, \ldots, x_d$ les d voisins de o. Montrer que pour tout $y \in \mathbb{T} - \{o\}$, il existe un unique $i \in \{1, \ldots, d\}$ tel que le chemin le plus court de y vers o passe par x_i. On appelle y un descendant de x_i par rapport à o.*

3. *Montrer que les ensembles $\mathbb{T}_i$ des descendants des x_i par rapport à o sont des arbres enracinés, et un au moins est infini.*

4. *En déduire que $p_c(\mathbb{T}) = \frac{1}{d-1}$.*

5. *Montrer que $\theta(p_c(\mathbb{T})) = 0$.*

Exercice 8 (Formule de Russo). *Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe sur lequel on considère la percolation par arrêtes. Soit $e \in E$. Pour ω une configuration de percolation, on pose, pour $j \in \{0, 1\}$:*

$$\omega_{j,e}(e') = \mathbf{1}_{e' \neq e}\omega(e') + \mathbf{1}_{e'=e}j.$$

Soit $X : 0, 1^E \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire. On définie la dérivée de X au point e, notée $\partial_e X$, par :

$$\partial_e X(\omega) = X(\omega_{1,e}) - X(\omega_{0,e}) = (X_{1,e} - X_{0,e})(\omega).$$

On suppose que X ne dépend que sur un nombre fini d'arêtes $\{e_1, \ldots, e_n\}$.

1. *Montrer que:*

$$\frac{d}{dp}\mathbb{E}[X] = \sum_{e \in E} \mathbb{E}_p[\partial_e X]$$

2. *En utilisant cette formule, montrer que $p \mapsto \mathbb{P}_p[x \leftrightarrow y]$ est strictement croissante.*

3. *Pensez-vous que la formule reste valable si X dépend d'un nombre infini d'arêtes?*