

Exercice 1. *Montrer que les ensembles ou les applications suivantes sont mesurables pour la tribu produit:*

1. $\{x \leftrightarrow y\}$, pour tous $x, y \in \mathbb{Z}^2$.
2. $|C(x)|$, pour tout $x \in \mathbb{Z}^2$.

Exercice 2.

1. Montrer que l'événement $x \leftrightarrow \infty$ est un événement croissant.
2. Montrer que A est un événement croissant si et seulement si A^c est un événement décroissant.
3. Montrer que l'union d'événements croissants est un événement croissant.
4. Montrer que l'intersection d'événements croissants est un événement croissant.

Exercice 3. *Montrer que les événements croissants engendrent la tribu produit.*

Exercice 4 (Graphes Transitifs). *Soit $G = (E, V)$ un graphe. Un automorphisme de G est une bijection $\phi : G \rightarrow G$ telle que:*

$$\forall x, y \in V, x \sim y \Leftrightarrow \phi(x) \sim \phi(y).$$

Soit $\text{Aut}(G)$ l'ensemble des automorphismes de G .

1. Montrer que munit de la composition des applications, $\text{Aut}(G)$ est un groupe.
2. Donner des exemples d'automorphismes de \mathbb{Z}^2 .

On dit que G est transitif si l'action de $\text{Aut}(G)$ sur G par évaluation est transitive.

3. Vérifier que G transitif est équivalent à:

$$\forall x, y \in G, \exists \phi_{x,y} \in \text{Aut}(G); \phi_{x,y}(x) = y.$$

4. Montrer que \mathbb{Z}^2 est transitif.
5. Montrer rigoureusement que si G est transitif, alors pour tout $x \in V$, $|C(x)|$ a la même loi.

Exercice 5 (Percolation sur un graphe). *Soit $G = (E, V)$ un graphe infini connexe. On considère la percolation par arêtes sur G .*

1. Soit $\Theta_G(p)$ la probabilité sous \mathbb{P}_p qu'il existe un agrégat infini. Montrer que pour tout $p \in [0, 1]$, $\Theta_G(p) \in \{0, 1\}$.
2. Montrer que Θ est croissante.

On définit $p_c(G) = \sup\{p \in [0, 1]; \Theta(p) = 0\}$. On fixe maintenant un $x \in G$. On note par $C(x)$ l'agrégat de x . Comme le graphe n'est pas nécessairement transitif, la loi de $C(x)$ dépend a priori de x . Ainsi, la percolation en deux sommets distincts de G ne relève pas de la même étude. Par contre, on va montrer que la probabilité critique est la même quel que soit le sommet considéré. On définit alors $\theta_{G,x}(p)$ par :

$$\theta_{G,x}(p) = \mathbb{P}_p(x \leftrightarrow \infty).$$

3. Montrer que $\theta_{G,x}$ est croissante, et donner $\theta_{G,x}(0)$ et $\theta_{G,x}(1)$. Pourquoi ne peut-on plus dire que $\theta_{G,x} \in \{0, 1\}$?

On définit alors $p_c(G, x) = \sup\{p \in [0, 1]; \theta_{G,x}(p) = 0\}$.

4. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

- (a) $\Theta_G(p) = 1$.
- (b) Il existe $x \in G$ tel que $\theta_{G,x}(p) > 0$.
- (c) Pour tout $x \in G$, $\theta_{G,x}(p) > 0$.

5. En déduire que pour tout $x \in G$, $p_c(G, x) = p_c(G)$.

6. Soit H un sous-graphe d'un graphe G , montrer que $p_c(H) \geq p_c(G)$.

Exercice 6. Soit $G = (E, V)$ un graphe connexe infini. Soit o un sommet de G . Un sous-ensemble d'arêtes $A \subset E$ est appelé un ensemble de coupure pour o si en enlevant A de G , le sommet o se trouve dans une composante connexe finie. De manière équivalente, tout chemin simple infini commençant à o doit traverser A . G est dit unidimensionnel s'il existe un sommet $o \in G$ et une suite d'ensembles de coupure disjoints $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour o telle que $\sup_{n \in \mathbb{N}} |A_n| < \infty$.

1. Montrer que si G est uni-dimensionnel, $p_c(G) = 1$.
2. Montrer que $Z \times \{0, \dots, n\}$ est unidimensionnel et en déduire que $p_c(Z \times \{0, \dots, n\}) = 1$.

Exercice 7. Montrer que pour des événements croissants A_1, \dots, A_n , on a :

$$\max\{\mathbb{P}_p(A_i), i \leq n\} \geq 1 - (1 - \mathbb{P}_p(A_1 \cup \dots \cup A_n))^{1/n}.$$

Exercice 8. Soit $G = (V, \mathbb{E})$ un graphe. Pour un sommet x , on note par $V(x)$ l'ensemble des voisins de x . Montrer que :

$$p_c(G) \geq \frac{1}{\sup_{x \in V} |V(x)| - 1}.$$

Exercice 9. Soit G un graphe connexe sur lequel on considère la percolation par arêtes. Montrer que $p \mapsto \theta(p)$ est strictement croissante pour $p > p_c$.

Exercice 10. Montrer que pour $x, y, z \in \mathbb{Z}_d$,

$$\mathbb{P}_p[\{x \leftrightarrow y\} \circ \{y \leftrightarrow z\}] \leq \mathbb{P}_p[\{x \leftrightarrow y\}] \cdot \mathbb{P}_p[\{y \leftrightarrow z\}].$$

Exercice 11. On considère la percolation sur d et on dénote par Λ_n la boîte de taille n autour de l'origine. Soit:

$$X_n = \frac{1}{|\Lambda_n|} \sum_{x \in \Lambda_n} \mathbf{1}_{x \leftrightarrow \infty}.$$

Montrer qu'en probabilité, on a:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \theta(p).$$

Exercice 12. Soient A un évènement croissant et B un évènement décroissant. Montrer que $A \circ B = A$.

Exercice 13. Soient $S \subset \mathbb{Z}^2$ fini contenant l'origine et $x \notin S$. Montrer que:

$$P_p[0 \leftrightarrow x] \leq \sum_{y \in \partial S} P_p[0 \leftrightarrow y] P_p[y \leftrightarrow x].$$

Exercice 14. Soit G un graphe infini et connexe. Soit $x \in G$ un sommet fixé. On appelle qu'un ensemble de coupure est un ensemble Π d'arêtes tel que tout chemin infini auto-évitant démarrant à x doit traverser une arête de Π . Un ensemble de coupure minimal est un ensemble Π tel que pour toute arête $e \in \Pi$, l'ensemble $\Pi \setminus \{e\}$ n'est pas un ensemble de coupure (c'est-à-dire que Π est minimal par rapport à l'inclusion). Soit G un graphe infini connexe.

1. Montrer que tout ensemble de coupure fini doit contenir un ensemble de coupure minimal.
2. Montrer que pour la percolation sur G , $x \leftrightarrow \infty$ si, et seulement si, pour chaque ensemble de coupure minimale finie Π , Π contient au moins une arête ouverte.
3. Soit C_n l'ensemble des ensembles de coupure minimale de taille n . Montrer que s'il existe n_0 et $M > 1$ tels que $|C_n| \leq M^n$ pour tout $n > n_0$, alors $p_c(G) \leq \frac{M-1}{M}$.

Exercice 15 (Percolation sur un arbre de degré d). On considère un arbre enraciné infini T de degré $d \geq 3$, c'est à dire un arbre dont tous les sommets sauf un ont d voisins. Le sommet restant en a $d-1$ et est appelé la racine. On considère une percolation de Berouilli sur T . On note par T_n les sommets de T qui sont à n générations de la racine.

1. Montrer que $(|C(0) \cap T_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est un processus de Galton-Watson de loi de reproduction $\text{Bin}(d-1, p)$, en déduire que $p_c(T) = \frac{1}{d-1}$.

On considère maintenant un arbre infini \mathbb{T} de degré d , c'est à dire, un graphe infini connexe sans cycles.

2. Soit $o \in \mathbb{T}$ et soient x_1, \dots, x_d les d voisins de o . Montrer que pour tout $y \in \mathbb{T} - \{o\}$, il existe un unique $i \in \{1, \dots, d\}$ tel que le chemin le plus court de y vers o passe par x_i . On appelle y un descendant de x_i par rapport à o .
3. Montrer que les ensembles \mathbb{T}_i des descendants des x_i par rapport à o sont des arbres enracinés, et un au moins est infini.

4. En déduire que $p_c(\mathbb{T}) = \frac{1}{d-1}$.

5. Montrer que $\theta(p_c(\mathbb{T})) = 0$.

Exercice 16 (Formule de Russo). Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe sur lequel on considère la percolation par arrêtes. Soit $e \in E$. Pour ω une configuration de percolation, on pose, pour $j \in \{0, 1\}$:

$$\omega_{j,e}(e') = \mathbf{1}_{e' \neq e} \omega(e') + \mathbf{1}_{e' = e} j.$$

Soit $X : 0, 1^E \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire. On définit la dérivée de X au point e , notée $\partial_e X$, par :

$$\partial_e X(\omega) = X(\omega_{1,e}) - X(\omega_{0,e}) = (X_{1,e} - X_{0,e})(\omega).$$

On suppose que X ne dépend que sur un nombre fini d'arêtes $\{e_1, \dots, e_n\}$.

1. Montrer que:

$$\frac{d}{dp} \mathbb{E}[X] = \sum_{e \in E} \mathbb{E}_p[\partial_e X]$$

2. En utilisant cette formule, montrer que $p \mapsto \mathbb{P}[x \leftrightarrow y]$ est strictement croissante.

3. Pensez-vous que la formule reste valable si X dépend d'un nombre infini d'arêtes?

Exercice 17. On considère la percolation sur \mathbb{Z}^d . Pour $x, y \in \mathbb{Z}^2$ on note par $\tau_p(x, y) = \mathbb{P}_p(x \leftrightarrow y)$ qu'on appelle fonction de connectivité. On suppose que $x \neq y$.

1. En utilisant la formule de Russo, montrer $p \mapsto \tau_p(x, y)$ est strictement croissante.

2. Montrer que si $p < p_c$, $\tau_p(x, y) \rightarrow 0$ quand $d(x, y) \rightarrow \infty$. A quelle vitesse cette convergence a lieu?

3. A-t-on toujours ce même résultat pour $p > p_c$? Que dire pour $p = p_c$?