Exercice 1. *Montrer que les ensembles ou les applications suivantes sont mesurables pour la tribu produit:*

1. $\{x \leftrightarrow y\}$, *pour tous* $x, y \in \mathbb{Z}^2$.
2. $|C(x)|$, *pour tout* $x \in \mathbb{Z}^2$.

Exercice 2.

1. *Montrer que l'événement* $x \leftrightarrow \infty$ *est un événement croissant.*
2. *Montrer que* A *est un événement croissant si et seulement si* A^c *est un événement décroissant.*
3. *Montrer que l'union d'événements croissants est un événement croissant.*
4. *Montrer que l'intersection d'événements croissants est un événement croissant.*

Exercice 3. *Montrer que les événements croissants engendrent la tribu produit.*

Exercice 4 (Graphes Transitifs)**.** *Soit* $G = (E, V)$ *un graphe. Un automorphisme de* G *est une bijection* $\phi : G \to G$ *telle que:*

$$\forall x, y \in V, x \sim y \Leftrightarrow \phi(x) \sim \phi(y).$$

Soit $Aut(G)$ *l'ensemble des automorphismes de* G.

1. *Montrer que munit de la composition des applications,* $Aut(G)$ *est un groupe.*
2. *Donner des exemples d'automorphismes de* $\mathbb{Z}^2$.

On dit que G *est transitif si l'action de* $Aut(G)$ *sur* G *par évaluation est transitive.*

3. *Vérifier que* G *transitif est équivalent à:*

$$\forall x, y \in G, \exists \phi_{x,y} \in Aut(G); \phi_{x,y}(x) = y.$$

4. *Montrer que* $\mathbb{Z}^2$ *est transitif.*
5. *Montrer rigoureusement que si* G *est transitif, alors pour tout* $x \in V$, $|C(x)|$ *a la même loi.*

Exercice 5 (Percolation sur un graphe.)**.** *Soit* $G = (E, V)$ *un graphe infini connexe. On considère la percolation par arêtes sur* G.

1. *Soit* $\Theta_G(p)$ *la probabilité sous* $\mathbb{P}_p$ *qu'il existe un agrégat infini. Montrer que pour tout* $p \in [0, 1]$, $\Theta_G(p) \in \{0, 1\}$.
2. *Montrer que* Θ *est croissante.*

On définie $p_c(G) = \sup\{p \in [0,1]; \Theta(p) = 0\}$. *On fixe maintenant un* $x \in G$. *On note par* $C(x)$ *l'agrégat de* x. *Comme le graphe n'est pas nécessairement transitif, la loi de* $C(x)$ *dépend à priori de* x. *Ainsi, la percolation en deux sommets distincts de* G *ne relève pas de la même étude. Par contre, on va montrer que la probabilité critique est la même quel que soit le somme considéré. On définit alors* $\theta_{G,x}(p)$ *par:*

$$\theta_{G,x}(p) = \mathbb{P}_p(x \leftrightarrow \infty).$$

3. *Montrer que* $\theta_{G,x}$ *est croissante, et donner* $\theta_{G,x}(0)$ *et* $\theta_{G,x}(1)$. *Pourquoi ne peut-on plus dire que* $\theta_{G,x} \in \{0,1\}$*?*

On définit alors $p_c(G,x) = \sup\{p \in [0,1]; \theta_{G,x}(p) = 0\}$.

4. *Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes:*
   (a) $\Theta_G(p) = 1$.
   (b) *Il existe* $x \in G$ *tel que* $\theta_{G,x}(p) > 0$.
   (c) *Pour tout* $x \in G$, $\theta_{G,x}(p) > 0$.
5. *En déduire que pour tout* $x \in G$, $p_c(G,x) = p_c(G)$.

Exercice 6. *Soit* H *un sous-graphe d'un graphe* G, *montrer que* $p_c(H) \geq p_c(G)$.

Exercice 7. *Soit* $G = (E,V)$ *un graphe connexe infini. Soit* o *un sommet de* G. *Un sous-ensemble d'arêtes* $A \subset E$ *est appelé un ensemble de coupure pour* o *si en enlevant* A *de* G, *le sommet* o *se trouve dans une composante connexe finie. De manière équivalente, tout chemin simple infini commençant à* o *doit traverser* A. G *est dit unidimensionnel s'il existe un sommet* $o \in G$ *et une suite d'ensembles de coupure disjoints* $(A_n)_{n\in}$ *pour* o *telle que* $\sup_{n\in} |A_n| < \infty$.

1. *Montrer que si* G *est uni-dimensionnel,* $p_c(G) = 1$.
2. *Montrer que* $Z \times \{0,\dots,n\}$ *est unidimensionnel et en déduire que* $p_c(Z \times \{0,\dots,n\}) = 1$.

Exercice 8. *Montrer que pour des événements croissants* $A_1,\dots,A_n$, *on a :*

$$\max\{\mathbb{P}_p(A_i), i \leq n\} \geq 1 - (1 - \mathbb{P}_p(A_1 \cup \ldots \cup A_n))^{1/n}.$$

Exercice 9. *Soit* $G = (\mathbb{V},\mathbb{E})$ *un graphe. Pour un sommet* x, *on note par* $V(x)$ *l'ensemble des voisins de* x. *Montrer que:*

$$p_c(G) \geq \frac{1}{\sup_{x\in\mathbb{V}} |V(x)| - 1}.$$

Exercice 10. *Soit* G *un graphe connexe sur lequel on considère la percolation par arêtes. Montrer que* $p \mapsto \theta(p)$ *est strictement croissante pour* $p > p_c$.

Exercice 11. *Montrer que pour* $x,y,z \in \mathbb{Z}_d$,

$$\mathbb{P}_p[\{x \leftrightarrow y\} \circ \{y \leftrightarrow z\}] \leq \mathbb{P}_p[\{x \leftrightarrow y\}] \cdot \mathbb{P}_p[\{y \leftrightarrow z\}].$$

Exercice 12. *On considère la percolation sur* ^{d} *et on dénote par* Λ_n *la boîte de taille* n *autour de l'origine. Soit:*

$$X_n = \frac{1}{|\Lambda_n|} \sum_{x \in \Lambda_n} \mathbf{1}_{x \leftrightarrow \infty}.$$

Montrer qu'en probabilité, on a:

$$\lim_{n \to \infty} X_n = \theta(p).$$

Exercice 13. *Soient* A *un évènement croissant et* B *un évènement décroissant. Montrer que* $A \circ B = A$.

Exercice 14. *Soient* $S \subset \mathbb{Z}^2$ *fini contenant l'origine et* $x \notin S$. *Montrer que:*

$$P_p[0 \leftrightarrow x] \leq \sum_{y \in \partial S} P_p[0 \leftrightarrow y] P_p[y \leftrightarrow x].$$

Exercice 15. *Soit* G *un graphe infini et connexe. Soit* $x \in G$ *un sommet fixé. On appelle qu'un ensemble de coupure est un ensemble* Π *d'arêtes tel que tout chemin infini auto-évitant démarrant à* x *doit traverser une arête de* Π. *Un ensemble de coupure minimal est un ensemble* Π *tel que pour toute arête* $e \in \Pi$, *l'ensemble* $\Pi \setminus \{e\}$ *n'est pas un ensemble de coupure (c'est-à-dire que* Π *est minimal par rapport à l'inclusion). Soit* G *un graphe infini connexe.*

1. *Montrer que tout ensemble de coupure fini doit contenir un ensemble de coupure minimal.*

2. *Montrer que pour la percolation sur* G, $x \leftrightarrow \infty$ *si, et seulement si, pour chaque ensemble de coupure minimale finie* Π, Π *contient au moins une arête ouverte.*

3. *Soit* C_n *l'ensemble des ensembles de coupure minimale de taille* n. *Montrer que s'il existe* n_0 *et* $M > 1$ *tels que* $|C_n| \leq M^n$ *pour tout* $n > n_0$, *alors* $p_c(G) \leq \frac{M-1}{M}$.

Exercice 16 (Percolation sur un arbre de degré d.)**.** *On considère un arbre enraciné infini* T *de degré* $d \geq 3$, *c'est à dire un arbre dont tous les sommets sauf un ont* d *voisins. Le sommet restant en a* $d-1$ *et est appelé la racine. On considère une percolation de Berounilli sur* T. *On note par* T_n *les sommets de* T *qui sont à* n *générations de la racine.*

1. *Montrer que* $(|C(0) \cap T_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ *est un processus de Galton-Watson de loi de reproduction* $Bin(d-1, p)$, *en déduire que* $p_c(T) = \frac{1}{d-1}$.

On considère maintenant un arbre infini $\mathbb{T}$ *de degré* d, *c'est à dire, un graphe infini connexe sans cycles.*

2. *Soit* $o \in \mathbb{T}$ *et soient* $x_1, \ldots, x_d$ *les* d *voisins de* o. *Montrer que pour tout* $y \in \mathbb{T} - \{o\}$, *il existe un unique* $i \in \{1, \ldots, d\}$ *tel que le chemin le plus court de* y *vers* o *passe par* x_i. *On appelle* y *un descendant de* x_i *par rapport à* o.

3. *Montrer que les ensembles* $\mathbb{T}_i$ *des descendants des* x_i *par rapport à* o *sont des arbres enracinés, et un au moins est infini.*

4. *En déduire que* $p_c(\mathbb{T}) = \frac{1}{d-1}$.

5. *Montrer que* $\theta(p_c(\mathbb{T})) = 0$.

Exercice 17 (Formule de Russo)**.** *Soit* $G = (V, E)$ *un graphe connexe sur lequel on considère la percolation par arrêtes. Soit* $e \in E$. *Pour* ω *une configuration de percolation, on pose, pour* $j \in \{0, 1\}$*:*

$$\omega_{j,e}(e') = \mathbf{1}_{e' \neq e}\omega(e') + \mathbf{1}_{e'=e}j.$$

Soit $X : 0, 1^E \to \mathbb{R}$ *une variable aléatoire. On définie la dérivée de* X *au point* e, *notée* $\partial_e X$, *par :*

$$\partial_e X(\omega) = X(\omega_{1,e}) - X(\omega_{0,e}) = (X_{1,e} - X_{0,e})(\omega).$$

On suppose que X *ne dépend que sur un nombre fini d'arêtes* $\{e_1, \ldots, e_n\}$.

1. *Montrer que:*
$$\frac{d}{dp}\mathbb{E}[X] = \sum_{e \in E} \mathbb{E}_p[\partial_e X]$$

2. *En utilisant cette formule, montrer que* $p \mapsto \mathbb{P}[x \leftrightarrow y]$ *est strictement croissante.*

3. *Pensez-vous que la formule reste valable si* X *dépend d'un nombre infini d'arêtes?*

Exercice 18. *On considère la percolation sur* $\mathbb{Z}^d$. *Pour* $x, y \in \mathbb{Z}^2$ *on note par* $\tau_p(x, y) = \mathbb{P}_p(x \leftrightarrow y)$ *qu'on appelle fonction de connectivité. On suppose que* $x \neq y$.

1. *En utilisant la formule de Russo, montrer* $p \mapsto \tau_p(x, y)$ *est strictement croissante.*

2. *Montrer que si* $p < p_c$, $\tau_p(x, y) \to 0$ *quand* $d(x, y) \to \infty$. *A quelle vitesse cette convergence a lieu?*

3. *A-t-on toujours ce même résultat pour* $p > p_c$*? Que dire pour* $p = p_c$*?*