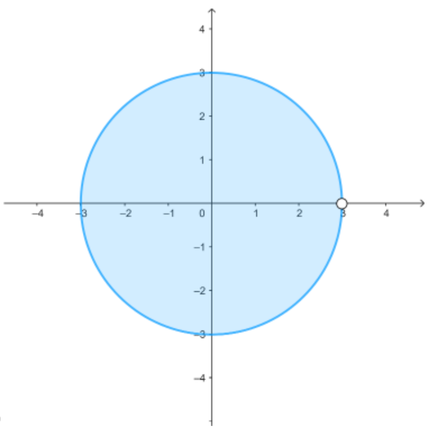
Interrogation 2 de TD : séries et séries de fonctions

Exercice 1 : Question de cours

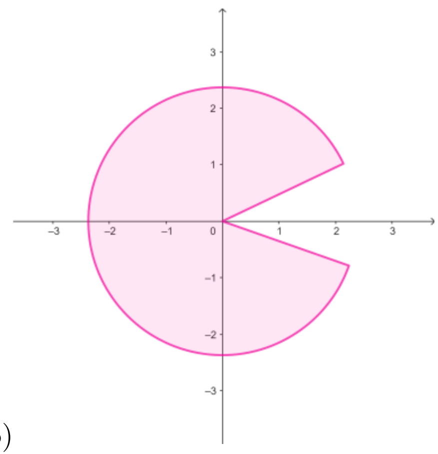
1. (1,5 points) Définir l'exponentielle complexe comme somme d'une série, puis démontrer soigneusement que pour $z, z' \in \mathbb{C}$, $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$.

2. (1,5 points) Parmi les domaines représentés dans les figures ci-dessous, dire lesquels ne peuvent pas être les domaines de convergence d'une série entière. Justifier.

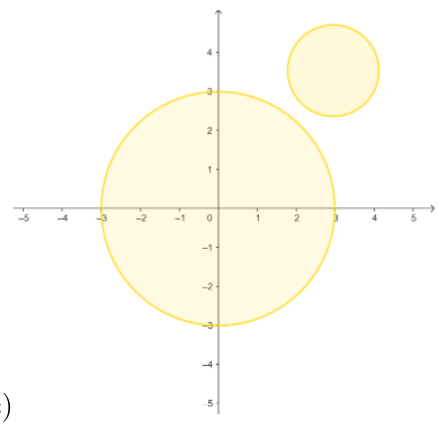
(a)



(b)



(c)



Exercices 2 : Questions indépendantes

1. (1 point) Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n) z^n$.

2. (2 points) Montrer que l'équation différentielle suivante admet une solution f développable en série entière au voisinage de 0 telle que $f(0) = 1$.
$$xy'' + y' - y = 0$$

Exercice 3 : Étude d'une fonction définie par une série

Pour $x > 0$, on pose :
$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}.$$

1. (1 point) Justifier que S est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. (1,5 points) Montrer que S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. (1 point) Préciser le sens de variation de S.

4. (1 point) Établir $\forall x > 0, S(x+1) + S(x) = \frac{1}{x}$.

5. (Bonus) Donner des équivalents simples de S en 0 et en $+\infty$.