

# Percolation - Exo -

## Ex 1

1. L'ensemble des configurations de percolation est l'ensemble des fonctions de  $\mathbb{E}$  (arêtes)  $\rightarrow \{0,1\}$ .  
On y met la tribu cylindrique, c'est

$$\mathcal{F} := \sigma \left( \left\{ f \in \mathbb{E}^{\{0,1\}} ; f(e_1) = v_1, \dots, f(e_p) = v_p ; \right. \right. \\ \left. \left. p \in \mathbb{N}, e_j \in \mathbb{E}, v_j = \text{ou } 0 \right\} \right).$$

\*  $M_q \{x \leftrightarrow y\}$  est mesurable  
qui signifie c'est intuitivement : on peut savoir si  $x \leftrightarrow y$  en regardant un nombre fini (éventuellement très grand) d'arêtes.  
Or

$$\{x \leftrightarrow y\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\{x \overset{B_n}{\longleftrightarrow} y\}}_{\substack{\text{dépend d'un nb} \\ \text{fini d'arêtes} \\ \text{donc} \in \mathcal{F}}}$$

\*  $M_q |C(x)|$  est mesurable.

$$|C(x)| = \lim_{N \rightarrow +\infty} |C_{B_N}(x)| \quad \text{donc mesurable.}$$

2. Soit  $(w_e)_{e \in \mathbb{E}} \in \{x \leftrightarrow \infty\}$   
donc  $\exists$  chemin ouvert  $w_{e_1} w_{e_2} \dots$  infini partant de  $x$ .

Si  $(w'_e)_{e \in \mathbb{E}} \geq (w_e)_{e \in \mathbb{E}}$  c'est-à-dire  $\forall e \in \mathbb{E}, w'_e \geq w_e$   
alors  $w'_{e_1}, \dots$  est un chemin infini partant de  $x$ .  
donc  $(w'_e)_{e \in \mathbb{E}} \in \{x \leftrightarrow \infty\}$

$$3. A \circ B = \left\{ (w_e)_{e \in \mathbb{E}} ; \exists F \subseteq \mathbb{E} ; \begin{array}{l} (w_e \mathbb{1}_F) \in A \\ \text{et } (w_e \mathbb{1}_{F^c}) \in B \end{array} \right\}$$

Comme  $B$  décroissant (et non-vide)  $B \ni (0)_{e \in \mathbb{E}}$   
donc

donc

$\forall (w_e) \in A$ , on prend pour  $F = E$  et donc  
 $(w_e) \in A \circ B$

donc  $A \circ B \supseteq A$

Mais  $A \circ B \subseteq A$  car  $A$  transitif  
donc  $A \circ B = A$ .

$$1. \quad 1 - \mathbb{P}_p (A_1 \cup \dots \cup A_n)$$

croissance ↗

$$\begin{aligned} &= \mathbb{P}_p^n (A_1^c \cap \dots \cap A_n^c) \\ &\geq \prod_{i=1}^n \mathbb{P}_p (A_i^c) = \prod_{i=1}^n (1 - \mathbb{P}_p (A_i)) \\ &\geq \min \{ 1 - \mathbb{P}_p (A_i); i = 1, \dots, n \}^n \end{aligned}$$

$$\text{donc } \left\{ 1 - \mathbb{P}_p \left( \bigcup_{i=1}^n A_i \right) \right\}^{\frac{1}{n}} \geq 1 - \max \{ \mathbb{P}_p (A_i); i=1, \dots, n \}$$

puisque l'inégalité se vérifie.

5. Soient  $x, y \in G$ . On va montrer que  
 $|C(x)| \stackrel{\text{loi}}{=} |C(y)|$ .

Comme  $G$  est transitif,  $\exists \phi \in \text{Aut}(G)$  t.q.  
 $\phi(x) = y$ .  $\phi$  induit naturellement un  $\Phi$  sur  $E$ .

$$\begin{aligned} \text{Donc ce cas} \quad C((w_e)_{e \in E})(x) \\ = C(\Phi((w_e)_{e \in E}))(y) \end{aligned}$$

$$\text{mais } \Phi((w_e)_{e \in E}) \stackrel{\text{loi}}{=} (w_e)_{e \in E}$$

$$\begin{aligned} \text{donc } C(\Phi((w_e)_{e \in E}))(y) &\stackrel{\text{loi}}{=} C((w_e)_{e \in E})(y) \\ &\stackrel{P^4}{=} C((w_e)_{e \in E})(x) \quad \text{donc OK!} \end{aligned}$$

## Ex 2

1. Soit  $\{e_1, \dots\}$  l'ensemble de arêtes.

$$\{\exists \text{ on agrégat } \infty\} = \bigcap_{n \geq 1} \left\{ \exists \text{ on chemin de } c_n \text{ à } \infty \text{ qui touche } p_0, c_1, \dots, c_{n-1} \right\}$$

$$\in \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{F}(c_n, c_{n+1}, \dots)$$

qui est la tribu asymptotique

Par 0-1-koïmogorov, on a le résultat.

$$2. \Theta(p) = P_p(\exists \text{ agrégat } \infty)$$

Soit  $(U_c)_{c \in E}$  une famille de v.a. uniformes.

$$\text{on a } (U_c)_{c \in E} \stackrel{\text{loi}}{=} \left( \mathbb{1}_{U_c \leq p} \right)_{c \in E}$$

$$\text{donc } P_p(\exists \text{ agrégat } \infty)$$

$$= P(\underbrace{\exists \text{ agrégat } \infty \text{ de la configuration } (\mathbb{1}_{U_c \leq p})_{c \in E}}_{i = U(p)})$$

$$\text{or si } p' \geq p, U(p') \supseteq U(p)$$

$$\text{donc, } P(U(p)) \leq P(U(p')) = \Theta(p')$$

d'où le résultat.

3. Même raisonnement que 2.

4. (a)  $\Rightarrow$  (b):

$$\begin{aligned} \Theta_G(p) &= P_p(\exists \text{ agrégat } \infty) \\ &= P_p\left(\bigcup_{z \in V} \{z \leftrightarrow \infty\}\right) \\ &\leq \sum_{z \in V} P_p(\{z \leftrightarrow \infty\}) \end{aligned}$$

donc si  $\forall z \quad \Theta_{G,z}(p) = 0, \quad \Theta_G(p) = 0$  absurde!

donc (a)  $\Rightarrow$  (b)

(b)  $\Rightarrow$  (c)

Soit  $z \in \mathbb{N}$  ;  $\Theta_{G,z}(p) > 0$

Soit  $y \in \mathbb{W}$ .

$$\mathbb{P}_p(\{y \leftrightarrow \infty\}) \geq \mathbb{P}_p(\{y \leftrightarrow z\} \cap \{z \leftrightarrow \infty\})$$

$$\stackrel{\text{FKG}}{\geq} \mathbb{P}_p(\{y \leftrightarrow z\}) \mathbb{P}_p(\{z \leftrightarrow \infty\})$$

Soit  $\gamma$  un chemin de  $y$  à  $z$ ,  $\mathbb{P}_p(\{y \leftrightarrow z\}) \geq p^{|\gamma|} > 0$

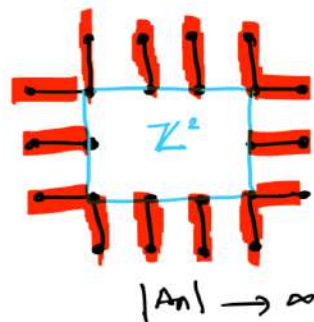
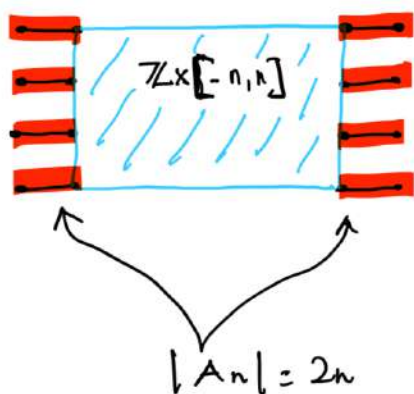
donc  $\mathbb{P}_p(\{y \leftrightarrow \infty\}) > 0$ .

(c)  $\Rightarrow$  (a)

$$\Theta_G(p) \geq \Theta_{G,z}(p) > 0.$$

6. Percolation sur  $H \Rightarrow$  percolation sur  $G$ .

Ex 3



1. Soit  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'ensembles de coupure disjoints. Soit  $p < 1$ . Par l'exo 2, on peut utiliser 0 pour valeur  $p_-(\Theta)$ . On a :
 
$$\begin{aligned} \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \infty) &\leq \mathbb{P}_p(\forall n \in \mathbb{N}, \exists c \text{ ouvert} \in A_n) \\ &= \mathbb{P}_p\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{\exists c \in A_n \text{ ouvert}\}\right) \end{aligned}$$

car  $(A_n)$  disjoint  
donc la proba  
est 1

où  $A = \sup_{n \in \mathbb{N}} A_n$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_p \left( \bigcap_{i=1}^n \{ \exists c \in A_n \text{ ouvert} \} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{i=1}^n \mathbb{P}_p \left( \{ \exists c \in A_n ; c \text{ ouvert} \} \right) \\
 &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{i=1}^n (1 - (1-p)^{|A_n|}) \\
 &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{i=1}^n (1 - (1-p)^A) \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - (1-p)^A)^n = 0
 \end{aligned}$$

2. Facile (voir dessin)

Ex 4

Soit  $x \in G$ ,  $p \in (0,1)$

$$\text{On a: } \mathbb{P}(x \leftrightarrow \infty) = \mathbb{P} \left( \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{ \exists \text{ chemin ouvert auto évitant } d_n \} \right)$$

$\cap \downarrow$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left( \{ \exists \text{ chemin auto évitant ouvert } d_n \} \right)$$

$$\text{or, } (*) \mathbb{P}(\{ \exists \text{ chemin } \dots \}) \leq \sum_{\substack{\gamma \text{ chemin} \\ \text{auto-évitant} \\ \text{de } d_n}} \mathbb{P}(\gamma \text{ ouvert})$$

Il y a au plus  $D(D-1)^{D-1}$  tels chemins ou

$$D := \sup_{x \in G} |V(x)|$$

$$\text{et } \mathbb{P}(\gamma \text{ ouvert}) = p^n$$

$$\text{donc } (*) \leq D(D-1)^{D-1} p^n = Dp(D-1)^{D-1}$$

$$\text{et } \mathbb{P}(x \leftrightarrow \infty) = 0 \quad \text{si} \quad p(D-1) < 1$$

d'où  $p_c(G) \geq \frac{1}{D-1}$ .

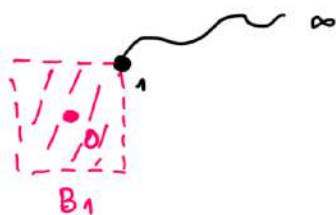
Ex 5  $p > p_c$

Soit  $\varepsilon > 0$ , on veut montrer que  $\mathbb{P}_{p+\varepsilon}(\{0 \leftrightarrow \infty\})$   
 $> \mathbb{P}_p(\{0 \leftrightarrow \infty\})$

On couple : c-à-d on prend  $(U_e)_{e \in E}$  une famille  $\perp$  de v.a. uniformes. On a:

(\*)  $\mathbb{P}_{p+\varepsilon}(\{0 \leftrightarrow \infty\}) = \mathbb{E} \left[ \mathbb{1}_{\{0 \leftrightarrow \infty\}} \left( (\mathbb{1}_{U_e \leq p+\varepsilon})_{e \in E} \right) \right]$

(\*\*)  $\mathbb{P}_p(\{0 \leftrightarrow \infty\}) = \mathbb{E} \left[ \mathbb{1}_{\{0 \leftrightarrow \infty\}} \left( (\mathbb{1}_{U_e \leq p})_{e \in E} \right) \right]$



Comme  $p > p_c$ , on sait que  $\mathbb{P}_p(\partial B_1 \leftrightarrow \infty) > 0$ .

on a:

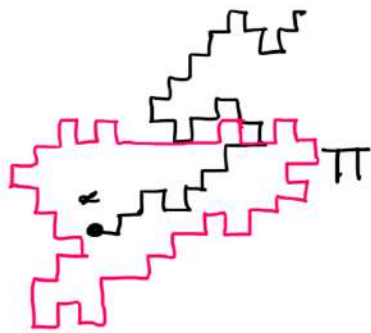


$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left( \partial B_1 \leftrightarrow \infty \cap \bigcap_{e \in E} (\mathbb{1}_{U_e \leq p} \mid \mathbb{1}_{U_e \leq p+\varepsilon}) \right) \\ &= \mathbb{P}(\partial B_1 \leftrightarrow \infty) \mathbb{P}(U_1 \in ]p, p+\varepsilon]) \dots \mathbb{P}(U_4 \in ]p, p+\varepsilon]) \\ &= \mathbb{P}_p(\partial B_1 \leftrightarrow \infty) \cdot \varepsilon^4 \end{aligned}$$

or  $A_\varepsilon \subseteq \{0 \leftrightarrow \infty\} \cap \left\{ \left( \mathbb{1}_{U_e \leq p+\varepsilon} \right)_e \right\}^c$

donc (\*) - (\*\*)  $\geq \mathbb{P}(A_\varepsilon) = \varepsilon^4 \mathbb{P}_p(\partial B_1 \leftrightarrow \infty) > 0$ .

## Ex 6



1. Soit  $TT$  un ensemble de coupure fini.

Si  $TT$  est minimal ok!

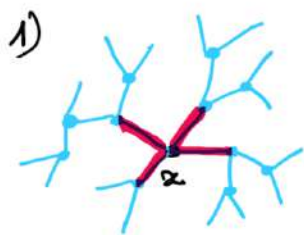
Si non  $\exists e_0 \in TT$  t.q.  $TT \setminus \{e_0\}$  est un ensemble de coupure.

On pose  $TT \leftarrow TT \setminus \{e_0\}$ .

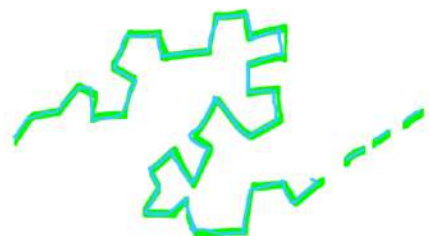
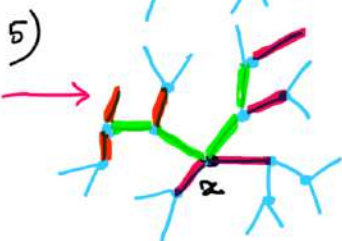
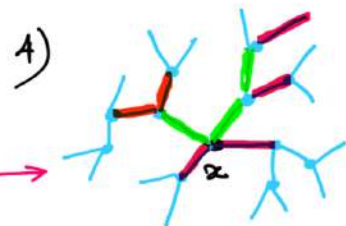
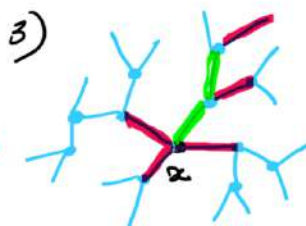
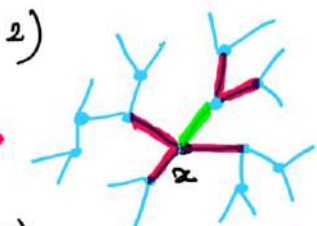
Le résultat de cet algorithme donne un ensemble de coupure minimal contenu dans  $TT$ .

2.  $x \leftrightarrow \infty \iff \exists$  chemin de  $x$  à l'infini ( $\infty$ ) ouvert  
 $\implies \forall$  tout ensemble de coupure  $TT, (x)$  traverse  $TT$   
 $\implies \exists$  une arête  $(TT \cap (x, \infty))$  dans  $TT$  ouverte.

$\forall TT$  ensemble de coupure minimale,  $TT$  contient une arête ouverte, on va construire un chemin qui part de  $x$  à  $\infty$ .



Voisins immédiats  $\implies TT_1$ .  
 $TT_1$  a une arête ouverte



3. Soit  $p > \frac{M-1}{M}$   $G = 0$ .

Soit  $N \in \mathbb{N}$ . Soit

$$\begin{aligned} A_N &= \{ \exists \text{ ensemble de coupure de long } \geq N \text{ complètement fermé} \} \\ &= \{ \exists n \geq N; \exists c \in C_n; \forall c \in C, c \text{ fermé} \} \\ &= \bigcup_{n \geq N} \bigcup_{c \in C_n} \{ \forall c \in C, c \text{ fermé} \} \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_p(A_N) &\leq \sum_{n \geq N} |C_n| \cdot (1-p)^n \\ &\leq \sum_{n \geq N} (M(1-p))^n \\ &= \frac{(M(1-p))^N}{1 - M(1-p)} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \quad (\text{car } M(1-p) < 1) \end{aligned}$$

soit  $N_0$  t.q.  $\mathbb{P}_p(A_{N_0}) \leq \frac{1}{4}$

Soit  $B = \{ \forall n \leq N_0, \forall \pi \in \Pi_n, \forall c \in \pi, c \text{ ouvert} \}$

$0 < \mathbb{P}_p(B) < 1$  car  $B$  dépend d'un nombre fini d'arêtes.

sur  $B \cap A_{N_0}^c$  il y a percolation car

$B \cap A_{N_0}^c \subseteq \{ \text{chaque ens de coupure minimale} \}$   
a au moins une arête ouverte

donc  $\mathbb{P}_p(x \leftrightarrow \infty) \geq \mathbb{P}_p(B \cap A_{N_0}^c)$

$\downarrow$   $\downarrow$   
 évenement évenement  
 croissant croissant car  $\theta_0$  décroissant

FKG

$$\geq \frac{3}{4} P_p(B) > 0$$

donc  $P_c(G) \leq \frac{M-1}{M}$ .

Ex 8

$$1. \frac{d}{dp} E_p[X] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{E_{p+\varepsilon}[X] - E_p[X]}{\varepsilon}$$

il faut donc calculer:

$$E_p[X] = E[X(\mathbb{1}_{U_1 \leq p}, \dots, \mathbb{1}_{U_n \leq p})]$$

donc si on pose

$$F(p) = E[X(\mathbb{1}_{U_1 \leq p}, \dots, \mathbb{1}_{U_n \leq p})]$$

on veut calculer  $\frac{d}{dp} F$ .

on soit

$$\bar{F}: (p_1, \dots, p_n) \mapsto E[X(\mathbb{1}_{U_1 \leq p_1}, \dots, \mathbb{1}_{U_n \leq p_n})]$$

on a,  $\bar{F} \circ (\text{id}, \dots, \text{id}) = F$

$$\text{et alors } \frac{d}{dp} F(p) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{F}}{\partial p_i}(p, \dots, p)$$

Il est alors plus facile de calculer  $\frac{\partial F}{\partial p_i}(p, \dots, p)$  qui par la définition vaut:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{E[X(\mathbb{1}_{U_1 \leq p}, \dots, \mathbb{1}_{U_i \leq p+\varepsilon}, \dots, \mathbb{1}_{U_n \leq p}) - X(\mathbb{1}_{U_1 \leq p}, \dots, \mathbb{1}_{U_n \leq p})]}{\varepsilon}$$

$$\begin{aligned}
 \text{or: } & \mathbb{E} \left[ X(\mathbb{1}_{U_{e_1} \leq p}, \dots, \mathbb{1}_{U_{e_{i-1}} \leq p+\varepsilon}, \dots, \mathbb{1}_{U_{e_n} \leq p}) \right. \\
 & \quad \left. - X(\mathbb{1}_{U_{e_1} \leq p}, \dots, \mathbb{1}_{U_{e_n} \leq p}) \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[ \left\{ X(\mathbb{1}_{U_{e_1} \leq p}, \dots, \mathbb{1}_{U_{e_{i-1}} \leq p}, 1, \mathbb{1}_{U_{e_{i+1}} \leq p}, \dots, \mathbb{1}_{U_{e_n} \leq p}) \right. \right. \\
 & \quad \left. - X(\mathbb{1}_{U_{e_1} \leq p}, \dots, \mathbb{1}_{U_{e_{i-1}} \leq p}, 0, \mathbb{1}_{U_{e_{i+1}} \leq p}, \dots, \mathbb{1}_{U_{e_n} \leq p}) \right\} \\
 & \quad \left. \times \mathbb{1}_{U_{e_i} \in ]p, p+\varepsilon]} \right]
 \end{aligned}$$

$$= \mathbb{E} \left[ \partial_{e_i} X \left( (\mathbb{1}_{U_{e_j} \leq p})_{i \neq j} \right) \cdot \mathbb{1}_{U_{e_i} \in ]p, p+\varepsilon]} \right]$$

$\perp$  Rq  $\partial_{e_i} X$  dépend uniquement de  $e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n$

$$\begin{aligned}
 &= \mathbb{E} \left[ \partial_{e_i} X \left( (\mathbb{1}_{U_{e_j} \leq p})_{i \neq j} \right) \right] \mathbb{E} \left[ \mathbb{1}_{U_{e_i} \in ]p, p+\varepsilon]} \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[ \partial_{e_i} X \left( (\mathbb{1}_{U_e \leq p})_e \right) \right] \cdot \varepsilon \\
 &= \mathbb{E}_p \left[ \partial_{e_i} X \right] \varepsilon
 \end{aligned}$$

$$\text{donc } \frac{\partial \hat{F}}{\partial p_i}(p) = \mathbb{E}_p \left[ \partial_{e_i} X \right]$$

$$\text{et } \frac{d}{dp} \mathbb{E}_p[X] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_p \left[ \partial_{e_i} X \right]$$

$$\text{or } \partial_e X = 0 \text{ pour } e \notin \{e_1, \dots, e_n\}$$

$$\text{donc } \frac{d}{dp} \mathbb{E}_p[X] = \sum_{e \in E} \mathbb{E}_p \left[ \partial_e X \right]$$

$$2. \mathbb{P}_p \left[ x \leftrightarrow y \right] = \mathbb{E}_p \left[ \mathbb{1}_{x \leftrightarrow y} \right]$$

$\mathbb{1}_{x \leftrightarrow y}$  ne dépend pas d'un nombre fini

d'arrêts.

posons

$$f^n(p) := \mathbb{P}_p [x \xrightarrow{B_n} y]$$

$$= \mathbb{E}_p [\mathbb{1}_{x \xrightarrow{B_n} y}]$$

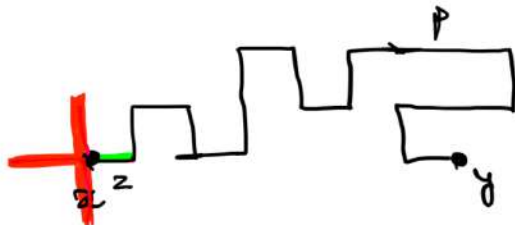
on a:  $f^{(n)}(p) \rightarrow f(p)$

on va essayer de montrer que  $f^{(n)}(p+\varepsilon) - f^{(n)}(p) \geq a$

t.q.  $a > 0$ . Dans ce cas on aura  $f(p+\varepsilon) - f(p) > 0$ .

On a:  $f^{(n)}(p+\varepsilon) - f^{(n)}(p) = \int_p^{p+\varepsilon} \frac{d}{dt} f^{(n)}(t) dt$

or,



$$\frac{d}{dp} f^{(n)}(p) = \sum_{C \in \mathcal{E}} \mathbb{E}_p [\partial_C \mathbb{1}_{x \xrightarrow{B_n} y}]$$

$$\geq \mathbb{E}_p [\partial_{\{x, z\}} \mathbb{1}_{x \xrightarrow{B_n} y}]$$

Soit  $xz c_1 \dots c_m y$  un chemin de  $x$  à  $y$ .

$$\frac{d}{dp} f^{(n)}(p) \geq \mathbb{E}_p \left[ \partial_{\{x, z\}} \mathbb{1}_{x \xrightarrow{B_n} y} \right]$$

$$\mathbb{1}_{\omega_{xz c_1} = \dots = \mathbb{1}_{\omega_{c_{m-1} c_m} = \mathbb{1}_{c_m y} = 1}}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc} \mathbb{1}_{\omega_{xz c_1} = \dots = \mathbb{1}_{\omega_{c_{m-1} c_m} = \mathbb{1}_{c_m y} = 1} \\ \mathbb{1}_{\omega_{xz c_1} = \dots = \mathbb{1}_{\omega_{c_{m-1} c_m} = \mathbb{1}_{c_m y} = 1} \\ \mathbb{1}_{\omega_{xz c_1} = \dots = \mathbb{1}_{\omega_{c_{m-1} c_m} = \mathbb{1}_{c_m y} = 1} \end{array} \right]$$

$$= \mathbb{E}_p \left[ \mathbb{1}_{xz=1} \mathbb{1}_{x \xrightarrow{B_n} y} \right]$$

$$\mathbb{1}_{\omega_{xz c_1} = \dots = \mathbb{1}_{\omega_{c_{m-1} c_m} = \mathbb{1}_{c_m y} = 1}}$$

Soit  $z \in c_1, \dots, c_m$  y on chemin de  $x$  à  $y$ .

$$\frac{d}{dp} f^{(n)}(p) \geq \mathbb{E}_p \left[ \partial_{\{z,z\}} \mathbb{1}_{x \xleftrightarrow{B_n} y} \right]$$

$$\mathbb{1}_{\omega_{zc_1} = \dots = \omega_{c_{m-1}c_m} = \omega_{cy} = 1}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc} \mathbb{1} & \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ \text{diagram 1} & \text{diagram 2} & \text{diagram 3} \end{array} \right]$$

$$= \mathbb{E}_p \left[ \mathbb{1}_{xz=1} \mathbb{1}_{x \xleftrightarrow{B_n} y} \right]$$

$$\mathbb{1}_{\omega_{zc_1} = \dots = \omega_{c_{m-1}c_m} = \omega_{cy} = 1}$$

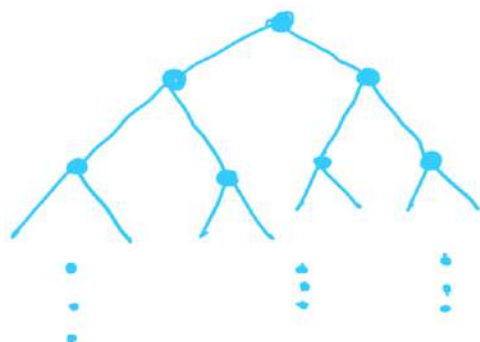
$$\left[ \begin{array}{ccc} \mathbb{1} & \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ \text{diagram 1} & \text{diagram 2} & \text{diagram 3} \end{array} \right] - 0$$

$$= p^m (1-p)^3$$

donc  $f^{(n)}(p+\varepsilon) - f^{(n)}(p) \geq \int_p^{p+\varepsilon} t^m (1-t)^3 dt > 0$   
et  $\mathbb{1}$  de  $n$

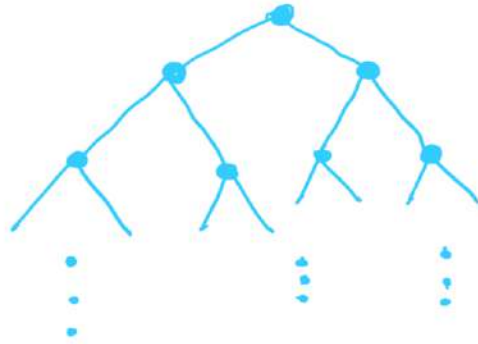
3. Je ne sais pas :)

Ex 7



$$1. |C(o) \cap T_n| - |C(o) \cap T_{n-1}|$$

Ex 7



$$1. \quad |C(o) \cap T_n| - |C(o) \cap T_{n-1}|$$

$$= \sum_{v \in C(o) \cap T_{n-1}} \sum_{\substack{x \sim v \\ d(x,o)=n}} \mathbb{1}_{\omega_{xv}=1}$$

$$\sim B(d-1, p)$$

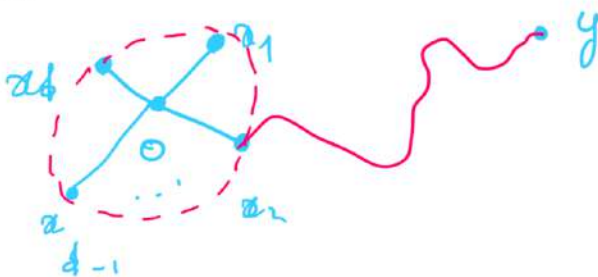
SW

pour que'il y ait percolation  $\Leftrightarrow$  population survit

donc  $1 = \mathbb{E} [B(d-1, p)] = p_c(d-1)$

$$p_c = \frac{1}{d-1}$$

2.



le chemin le plus court de  $y \rightarrow B(o, 1)$

puis passe par  $x_i$  car  
sinon, il y aurait un cycle.

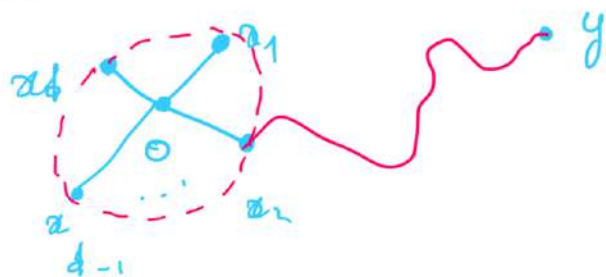
3. Facile

4. Comme  $\Pi_i$  sous-graphe de  $\Pi$ , par Exo 2, question

donc  $1 = \mathbb{E} [B(d-1, \frac{1}{d-1})] = p_c(d-1)$

$$p_c = \frac{1}{d-1}$$

2.



le chemin le plus court de  $y \rightarrow B(o, 1)$

puis passe par  $x_i$  car  
sinon, il y aurait un cycle.

3. Facile

4. Comme  $\Pi_i$  sous-graphe de  $\Pi$ , par Exo 2, question

$$6, \quad p_c(\Pi_i) \geq p_c(\Pi)$$

$$\text{or} \quad p_c(\Pi_i) = \frac{1}{d-1} \text{ donc } p_c(\Pi) \leq \frac{1}{d-1}.$$

or s'il y a percolation dans  $\Pi$ , nécessairement

$\exists i$  : il y a percolation dans  $\Pi_i$

$$\text{si } p < \frac{1}{d-1}, \quad \mathbb{P}_p(\text{percolation } \Pi) \leq \sum_{i=1}^d \mathbb{P}_p(\text{percolation dans } \Pi_i)$$

$$\text{donc } p_c(\Pi) \stackrel{0}{=} \frac{1}{d-1} \text{ donc } p_c(\Pi) = \frac{1}{d-1}.$$

5. pour  $p = p_c$ , probabilité s'étant donc  $\Theta(p_c(\Pi_i)) = 0$   
 $\Rightarrow \Theta(p_c(\Pi)) = 0.$